# 7 Settimo foglio

**Esercizio 7.1 (lemma di Burnside).** Se un gruppo $G$ agisce su $X$ (entrambi finiti) provare che il numero delle orbite $|X/G|$ è pari alla media dei punti fissati da ogni elemento del gruppo, ovvero:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

Dove $Fix(g) = \{x \in X | g \cdot x = x\}$ a volte denotato $X^g$.

**Esercizio 7.2.** Sia $n$ intero positivo, $d(n)$ il numero dei divisori di $n$, $\phi(n)$ il numero degli interi più piccoli di $n$ che non hanno divisori in comune con $n$ e denotiamo con $(a, b)$ il massimo comun divisore fra $a$ e $b$. Provare usando l'azione di moltiplicazione di $Aut(\mathbb{Z}_n)$ su $\mathbb{Z}_n$ che:

$$\sum_{a \in S} (a - 1, n) = \phi(n)d(n)$$

Dove $S = \{a \in \mathbb{N} | 0 < a < n, (a, n) = 1\}$.

**Esercizio 7.3.** Provare che il gruppo delle rotazioni del tetraedro è isomorfo ad $A_4$.

**Esercizio 7.4.** Provare che il gruppo delle rotazioni del cubo è isomorfo ad $S_4$.

**Esercizio 7.5.** Consideriamo il gruppo $G = GL_m(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R})$ e l'insieme $S = M_{m \cdot n}(\mathbb{R})$.

1. Provare che l'applicazione $(P, Q) * A = PAQ^{-1}$ definisce una azione di gruppo sull'insieme $S$.
2. Descrivere la decomposizione di $S$ in $G-$orbite.
3. Se $m \leq n$ quale è lo stabilizzatore della matrice $\begin{pmatrix} Id | 0 \end{pmatrix}$

**Esercizio 7.6.**

1. Descrivere l'orbita e lo stabilizzatore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto all'azione di coniugio di $GL_2(\mathbb{R})$ su $M_{2 \cdot 2}(\mathbb{R})$.
2. Ripetere l'esercizio usando il campo $\mathbb{F}_5$ anziché $\mathbb{R}$.