Esercizi per le vacanze

1. (Herstein 3.4.12) Si consideri l'anello (non commutativo) $A = \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{Q})$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti razionali. Mostrare che gli unici ideali bilateri di A sono 0 e A.

2. (Herstein 3.4.18) Sia A un anello, sia $I \subset A$ un ideale sinistro, e sia $r(I) = \{x \in A \,|\, xi = 0 \,\forall i \in I\}$. Mostrare che $r(I)$ è un ideale bilatero di A.

3. (Herstein 3.6.5) Sia A un anello commutativo con unità. Sia $S \subset A$ un sottoinsieme *moltiplicativo*, ovvero tale che:

$$\text{(i) } 0 \notin S\,; \quad \text{(ii) } s, t \in S \text{ implica } st \in S\,.$$

Definire su $A \times S$ la seguente relazione di equivalenza: $(a, s) \sim (b, t)$ se esiste $v \in S$ tale che $v(at - bs) = 0$.

(a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza, e che nell'insieme quoziente

$$A_S := (A \times S)/\sim$$

si può definire in modo canonico una struttura di anello (in modo analogo a quanto fatto per il campo delle frazioni di un dominio).

(b) Definire (in modo naturale) un omomorfismo $\varphi: A \to A_S$, verificare che $S \cap \ker \varphi = \emptyset$ e le immagini degli elementi di S in A_S sono invertibili.

4. Sia A un anello commutativo con unità e siano I, J ideali di A. mostrare che:

(a) $IJ = \{\sum_\alpha i_\alpha j_\alpha \text{ (somme finite)} \mid i_\alpha \in I,\, j_\alpha \in J\}$ è un ideale di A;
(b) $I \cap J$ è un ideale di A;
(c) $I + J = \{i + j \,|\, i \in I,\, j \in J\}$ è un ideale di A.
(d) Mostrare che $IJ \subset I \cap J$.
(e) Mostrare che, se $I + J = A$, allora:
  (i) $IJ = I \cap J$;
  (ii) vale il Teorema cinese dei resti: per ogni scelta di $a, b \in A$ esiste $x \in A$ tale che $x - a \in I$ e $x - b \in J$.

5. (Artin 10.5.7) Descrivere l'anello ottenuto a partire da $\mathbb{Z}$ e aggiungendo un elemento α che soddisfa entrambe le relazioni $\alpha^3 + \alpha^2 + 1 = 0$ e $\alpha^2 + \alpha = 0$.

6. (Artin 10.7.2) Determinare gli ideali massimali dei seguenti anelli:

(a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
(b) $\mathbb{R}[x]/(x^2)$;
(c) $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 3x + 2)$;
(d) $\mathbb{R}[x]/(x^2 + x + 1)$.

7. (Artin 11.1.6) Calcolare il massimo comun divisore dei seguenti polinomi $p, q \in \mathbb{Q}[x]$:

$$p = x^3 - 6x^2 + x + 4\,, \qquad q = x^5 - 6x + 1\,.$$

8. (Artin 11.1.7) Dimostrare che, per ogni campo $\mathbb{F}$, esistono infiniti polinomi irriducibili monici in $\mathbb{F}[x]$.

9. Dimostrare che l'anello quoziente $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 1)$ è isomorfo al sottoanello $A \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ così definito:

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b \bmod 2\}\,.$$