Esercizi tutor Geometria 2024/2025

1 Esercizio

Si consideri il campo dei numeri reali $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Si consideri il sottoinsieme

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{\alpha + \sqrt{2}\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}.$$

Dimostrare che le due operazioni di $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ inducono in questo sottoinsieme una struttura di anello. Dimostrare che $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ è un campo.
Dare una struttura di spazio vettoriale a $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sul campo $\mathbb{Q}$. Indicarne la dimensione e una base.
Quella indicata è l'unica struttura di spazio vettoriale possibile per $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$?

Soluzione

Per dare la struttura di anello dobbiamo considerare $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ munito di due operazioni binarie interne $\square$ e $\star$. È possibile definire queste due operazioni considerando gli elementi di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ come elementi di $\mathbb{R}$ e usando le usuali nozioni di somma $+$ e prodotto $\cdot$.
L'operazione $\square$ sarà la somma, dati $x = a_1 + \sqrt{2}b_1$ e $y = a_2 + \sqrt{2}b_2$ la somma è definita da:

$$x \square y = (a_1 + \sqrt{2}b_1) + (a_2 + \sqrt{2}b_2) = (a_1 + a_2) + \sqrt{2}(b_1 + b_2).$$

È facile verificare l'associatività, ossia $(x \square y) \square z = x \square (y \square z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, usando l'associatività della somma $+$ in $\mathbb{R}$. Così come è immediata la verifica della commutatività.
L'elemento neutro rispetto la somma $\square$ è dato da $e = 0 + \sqrt{2} \cdot 0 = 0$ in quanto si deve avere che $x \square e = x$ per ogni $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
L'elemento inverso di $x = a + \sqrt{2}b$ rispetto alla somma $\square$, chiamato $\bar{x}$, deve soddisfare $x \square \bar{x} = e$. Dunque l'inverso è l'unico elemento di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ che soddisfa questa equazione, ossia $\bar{x} = -a + \sqrt{2}(-b)$.
Otteniamo dunque che $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \square)$ è un gruppo abeliano. Per verificare che $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \square, \star)$ sia un campo, dobbiamo accertarci che $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{e\}, \star)$ sia un gruppo abeliano.
L'operazione prodotto $\star$ in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ è definita, per ogni $x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, da:

$$x \star y = (a_1 + \sqrt{2}b_1) \cdot (a_2 + \sqrt{2}b_2) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + \sqrt{2}(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Anche in questo caso associatività e commutatività discendono dalle proprietà associativa e commutativa del prodotto $\cdot$ in $\mathbb{R}$.
L'elemento neutro rispetto il prodotto $\star$, indicato da $\mathbb{1}$, deve soddisfare $x \star \mathbb{1} = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Da cui si ricava $\mathbb{1} = 1 + \sqrt{2}\,0 = 1$.
Queste proprietà ci assicurano che $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \square, \star)$ è un anello commutativo unitario. Per essere un campo occorre trovare l'elemento inverso rispetto il prodotto $\star$.
Possiamo supporre che l'inverso di $x = a + \sqrt{2}b \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, con $x \neq e$, sia l'usuale inverso in $\mathbb{R}$: $x^{-1} = \frac{1}{a+\sqrt{2}b}$. Ovviamenete il denominatore è non nullo per l'ipotesi che $x \neq e$, tuttavia non è evidente che $x^{-1} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Per verificare ciò moltiplichiamo e dividiamo x^{-1} per $a - \sqrt{2}b$ ottenendo:

$$x^{-1} = \frac{a - \sqrt{2}b}{a^2 - 2b^2}.$$

Il denominatore è non nullo poiché l'equazione $a^2 - 2b^2 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$. In questa forma è evidente che $x^{-1} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, costituendo dunque l'elemento inverso di $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ rispetto il prodotto $\star$.
Bisogna infine verificare che la moltiplicazione sia distributiva rispetto la somma, ossia

$$z \star (x \square y) = (z \star x) \square (z \star y),$$

che si può verificare facilmente calcolando i termini ai due lati dell'uguale.
Perciò $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \square, \star)$ è un campo.

Per dare una struttura di spazio vettoriale su campo $\mathbb{Q}$ devo munire $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \square)$ di un'operazione di prodotto per uno scalare, dove uno scalare è un elemento di $\mathbb{Q}$. Per ogni $x = a + \sqrt{2}b \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ definisco il prodotto per un qualunque $\lambda \in \mathbb{Q}$ come

$$\lambda x = (\lambda \cdot a) + \sqrt{2}(\lambda \cdot b).$$

Dove $\cdot$ è l'usuale moltiplicazione tra numeri razionali. Tale prodotto è chiaramente distributivo $\lambda(x \square y) = \lambda x \square \lambda y$.
Con una tale struttura $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ è uno spazio vettoriale di dimensione due ed è, dunque, isomorfo a $\mathbb{Q}^2$. Una possibile base è data da $\{1 + \sqrt{2}\,0, 0 + \sqrt{2}\,1\}$.
Questa non è l'unica struttura di spazio vettoriale di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Posso infatti considerarlo come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, con il prodotto per uno scalare dato dal prodotto $\star$. In tal caso, è uno spazio vettoriale di dimensione uno e la base è data da un suo qualunque elemento (e.g. $\{1 + \sqrt{2}\,0\}$).

2 Esercizio

Si consideri l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Dare dimensione e base di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale complesso e come spazio vettoriale reale.
Sia $I : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'applicazione data dalla moltiplicazione per l'unità immaginaria $I(z) = iz$, dimostrare che l'applicazione è lineare su entrambi gli spazi vettoriali e fornire la matrice dell'applicazione rispetto le basi date precedentemente.

Si consideri l'applicazione dal complesso coniugato $C(z) = \bar{z}$, dire se è lineare su entrambi gli spazi vettoriali e, nel caso, trovare la matrice associata nella base scelta.

Soluzione

Poiché $\mathbb{C}$ è un campo è sempre uno spazio vettoriale su se stesso di dimensione 1. La base canonica è $\mathcal{E}_{\mathbb{C}} = \{1\}$.
Possiamo anche considerare $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale reale, in tal caso la base canonica è $\mathcal{E}_{\mathbb{R}} = \{1, i\}$. Chiaramente 1 e i sono linearmente indipendenti in quanto non esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda i = 1$. Inoltre $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{C}$ in quanto ogni numero complesso può essere scritto come $z = \lambda_1 1 + \lambda_2 i$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dunque la dimensione di questo spazio vettoriale è 2.

Poiché la moltiplicazione per i è la moltiplicazione per un elemento del campo, l'applicazione I è lineare su $\mathbb{C}$ sp. vett. complesso e la matrice associata rispetto la base canonica è $M_{\mathcal{E}_{\mathbb{C}},\mathcal{E}_{\mathbb{C}}}(I) = i$. La moltiplicazione per i è lineare anche su $\mathbb{C}$ sp. vett. reale grazie alla proprietà commutativa $i\lambda z = \lambda i z$. In tal caso la matrice associata è

$$M_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}},\mathcal{E}_{\mathbb{R}}}(I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione C non è lineare su $\mathbb{C}$ sp. vett. complesso. Infatti, nonostante $C(z_1+z_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, l'applicazione non soddisfa l'omogeneità $C(az) = \bar{a}\bar{z} \neq a\bar{z}$ quando $a \in \mathbb{C}$. Se invece $a \in \mathbb{R}$, allora l'omogeneità è soddisfatta e l'applicazione è lineare su $\mathbb{C}$ sp. vett. reale. In tal caso, la matrice associata rispetto la base canonica è

$$M_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}},\mathcal{E}_{\mathbb{R}}}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3 Esercizio

Sia $\mathbb{R}_n[x]$ l'insieme dei polinomi di grado uguale o inferiore a n a coefficienti reali. Un elemento di questo spazio $p \in \mathbb{R}_n[x]$ si scrive dunque come una somma formale

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

1. Verificare che un tale spazio ha una struttura di spazio vettoriale reale. Indicarne la dimensione e una base.
2. Si definisca l'applicazione $\mathrm{D} : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ come

$$\mathrm{D} : p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mapsto (\mathrm{D}\, p)(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

Verificare che D è lineare. Dare dimensione e base di Ker(D) e Im(D). Trovare la matrice associata a D nella base data precedentemente.

3. Si consideri l'applicazione:

$$\begin{aligned}\Phi :&\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}\\ &p(x) \mapsto (p(0), (\mathrm{D}\, p)(0), (\mathrm{D}^2\, p)(0), \dots, (\mathrm{D}^n\, p)(0)).\end{aligned}$$

Verificare che Φ è lineare e trovare la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$. Dire se Φ è biettiva. Se lo è, fornirne l'inversa.

Soluzione

1. È facile verificare che si tratta di uno sp. vett. reale. La somma di due elementi $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ e $q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ è definita come

$$(p+q)(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k)x^k.$$

Il prodotto per uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ è dato da

$$(\alpha p)(x) = \sum_{k=0}^n (\alpha a_k)x^k.$$

La dimensione di $\mathbb{R}_n[x]$ è $n+1$. Una possibile base è data dalla base canonica $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

2. Si considerino $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$, tali che p, q come sopra.

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\alpha p + \beta q)(x) = &\sum_{k=1}^n k(\alpha a_k + \beta b_k)x^{k-1}\\ =&\alpha \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} + \beta \sum_{k=1}^n k b_k x^{k-1} = \alpha(\mathrm{D}\, p)(x) + \beta(\mathrm{D}\, q)(x).\end{aligned}$$

Per calcolare la dimensione di Ker(D) e Im(D) troviamo prima la matrice associata a D nella base $\mathcal{E}$. Troviamo dunque le immagini dei vettori di base $(\mathrm{D}\,1)(x) = 0$, $(\mathrm{D}\,x)(x) = 1$, $(\mathrm{D}\,x^2)(x) = 2x, \dots,$ $(\mathrm{D}\,x^n)(x) = nx^{n-1}$. Le colonne di questa matrice saranno le coordinate di questi vettori rispetto la base $\mathcal{E}$.

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\mathrm{D}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Risulta quindi evidente che $\mathrm{Ker(D)} = Span\{1\}$ e dunque ha dimensione uno. Per il teorema della dimensione $\dim \mathbb{R}_n[x] = \dim \mathrm{Ker(D)} + \dim \mathrm{Im(D)}$, da cui otteniamo $\dim \mathrm{Im(D)} = n$. E la base data da $\{x, x^2, \ldots, x^n\}$.

Si noti che è possibile scegliere una base in cui l'espressione matriciale di D è ancora più semplice, ci riferiremo a questa base come base normalizzata $\mathcal{N} = \{1, x, \frac{1}{2!}x^2, \ldots, \frac{1}{n!}x^n\}$. In una tale base. la matrice associata a D è della forma

$$M_{\mathcal{N}\mathcal{N}}(\mathrm{D}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ciò si può ottenere con lo stesso procedimento di prima applicato alla nuova base $\mathcal{N}$. Equivalentemente si può calcolare usando la matrice di cambiamento di coordinate

$$C_{\mathcal{E}\mathcal{N}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n!} \end{pmatrix}$$

Sapendo che ${}_{\mathcal{N}}M_{\mathcal{N}}(\mathrm{D}) = {}_{\mathcal{N}}C_{\mathcal{E}}^{-1}(\mathrm{id})_{\mathcal{E}}M_{\mathcal{E}}(\mathrm{D})_{\mathcal{E}}C_{\mathcal{N}}(\mathrm{id})$.

3. Bisogna innanzitutto verificare che l'applicazione $p(x) \mapsto p(0)$ sia lineare. Si considerino $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$, tali che p, q come sopra. Si ha che $(\alpha p + \beta q)(0) = \alpha a_0 + \beta b_0 = \alpha p(0) + \beta q(0)$, ed è dunque lineare.
Poiché D è lineare, le sue potenze sono lineari. Dunque Φ è una composizione di applicazioni lineari ed è essa stessa lineare. La matrice associata a Φ rispetto alla basi canoniche in partenza $\mathcal{E}$ e in arrivo $\mathcal{E}'$ è

$$M_{\mathcal{E}'\mathcal{E}}(\mathrm{D}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2! & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n! \end{pmatrix}$$

La matrice associata rispetto la base normalizzata in partenza è

$$M_{\mathcal{E}'\mathcal{N}}(\mathrm{D}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

L'applicazione Φ è chiaramente invertibile. L'applicazione inversa sarà

$$\begin{aligned}\Phi^{-1} :&\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n[x] \\ &(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^{n} k!\, a_{k+1}\, x^k.\end{aligned}$$

4 Esercizio

Siano S un sottoinsieme e π un piano in $\mathbb{R}^5$ caratterizzati come segue:

S è il sottospazio definito dal sistema di equazioni: $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

π è il piano generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Indicheremo con $\mathbb{R}^3_S$ il sottospazio vettoriale relativo a S e con $\mathbb{R}^2_\pi$ quello relativo a π.

- Verificare che $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^3_S \oplus \mathbb{R}^2_\pi$

Definiamo ora una proiezione lineare $P : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ su $\mathbb{R}^3_S$ "parallelamente" a $\mathbb{R}^2_\pi$ nella maniera seguente:
Ogni vettore $v \in \mathbb{R}^5$ si scrive in maniera univoca come $v = u + w$, dove $u \in \mathbb{R}^2_\pi$ e $w \in \mathbb{R}^3_S$ (ciò a causa delle proprietà di somma diretta). La proiezione di v è definita dalla sua componente lungo $\mathbb{R}^3_S$, ossia $P(v) = P(u + w) = w$.

- Dare la matrice associata a P rispetto la base canonica $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^5$.

Soluzione

Per dimostrare che i due spazi vettoriali sono in somma diretta bisogna verificare che la loro somma sia tutto lo spazio e che abbiano intersezione banale.

Iniziamo dimostrando che $\mathbb{R}^3_S + \mathbb{R}^2_\pi = \mathbb{R}^5$. Per fare ciò dimostriamo che affiancando una base per $\mathbb{R}^3_S$ e una per $\mathbb{R}^2_\pi$, si ottiene una base per $\mathbb{R}^5$.
La base di $\mathbb{R}^2_\pi$ è già nota ed è costituita da due vettori $\{v_1 := (1\ 2\ 1\ 0\ 0), v_2 := (0\ 0\ 0\ 1\ 0)\}$. La base di $\mathbb{R}^3_S$ si trova risolvendo il sistema, è facile verificare che

$$\mathbb{R}^3_S = Span\{v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Bisogna ora verificare che $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ costituisca una base per $\mathbb{R}^5$. Per verificare che siano linearmente indipendenti calcoliamo il determinante della matrice che ha come colonne questi 5 vettori.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Per fare il calcolo si è usato due volte lo sviluppo di Laplace lungo l'ultima riga e infine la regola di Sarrus. Il determinante è non nullo, dunque sono 5 vettori linearmente indipendenti; in uno spazio di dimensione 5 sono automaticamente una base. Perciò $\mathbb{R}^3_S + \mathbb{R}^2_\pi = \mathbb{R}^5$.

Verifichiamo ora che $\mathbb{R}^3_S \cap \mathbb{R}^2_\pi = \{0\}$. Ciò si deduce dal teorema della dimensione $\dim(\mathbb{R}^2_\pi + \mathbb{R}^3_S) = \dim(\mathbb{R}^2_\pi) + \dim(\mathbb{R}^3_S) - \dim(\mathbb{R}^2_\pi \cap \mathbb{R}^3_S)$, da cui $\dim(\mathbb{R}^2_\pi \cap \mathbb{R}^3_S) = 0$. Un altro metodo (utile se non conosciamo la somma dei due spazi), è di mettere a sistema le equazioni cartesiane di $\mathbb{R}^3_S$ e $\mathbb{R}^2_\pi$ e verificare che ammetta come unica soluzione il vettore nullo. Dobbiamo innanzitutto trovare le equazioni cartesiane per $\mathbb{R}^2_\pi$. Riduciamo dunque in scala la seguente matrice

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & x_5 \end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 2x_3 + x_4 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & x_5 \end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 2x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - x_3 \\ 0 & 0 & x_2 - 2x_3 \\ 0 & 0 & x_5 \end{array}\right.$$

Otteniamo così il sistema di equazioni per il piano π:

$$\mathbb{R}^2_\pi = \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Il sistema di equazioni da risolvere per trovare l'intersezione è dunque il seguente:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{a cui è associata la matrice} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché il determinante della matrice associata al sistema lineare è non nullo (in particolare vale 2) allora il sistema ammette una e una sola soluzione. Essendo un sistema omogeneo, l'unica soluzione è data dal vettore nullo.

Per risolvere il secondo punto è utile notare che esiste una base in cui la matrice associata a P assume una forma molto semplice. Infatti, dato un qualunque vettore $w \in \mathbb{R}^3_S$, $P(w) = w$. In termini di autovettori, $\mathbb{R}^3_S$ costituisce l'autospazio dell'autovalore 1. Mentre, un qualunque vettore $u \in \mathbb{R}^2_\pi$ viene mandato in zero, $P(u) = 0$. $\mathbb{R}^2_\pi$ costituisce il nucleo di P e, in particolare, l'autospazio di autovalore 0. Dunque, se scegliamo una base composta da due vettori in $\mathbb{R}^2_\pi$ e tre in $\mathbb{R}^3_S$, la matrice associata a P in questa base risulta diagonalizzata. Una tale base è fornita, per costruzione, dalla base $\mathcal{B}$ precedentemente definita. L'espressione di P in questa base è

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bisognerà allora trovare la matrice del cambiamento di coordinate dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{E}$. La j-esima colonna di questa matrice è formata dalle coordinate del j-esimo vettore della base $\mathcal{B}$ rispetto la base $\mathcal{E}$, ottenendo:

$$C := M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La cui inversa è

$$C^{-1} = M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare la matrice associata a P nella base $\mathcal{E}$ usiamo la nota formula

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P) = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{id})M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(P)M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = CM_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(P)C^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Esercizio

Sia $\mathcal{B} := \{1 + 2x + x^2, x, 1 - x^2\}$ una base di $\mathbb{R}_2[x]$. Trovare la matrice del cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ alla base $\mathcal{B}$.
Dare la base $\mathcal{C}$ tale che la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ sia data da

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{E}$ a $\mathbb{C}$.
Dire se esiste una base $\mathbb{C}'$ tale che la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathbb{C}'$ sia data da

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione

La matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{B}$ ha all'i-esima colonna il vettore delle coordinate del i-esimo vettore di $\mathcal{B}$ rispetto la base $\mathcal{E}$. Chiamiamo questa matrice B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allo stesso modo, la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$ ha come i-esima colonna il vettore delle coordinate del i-esimo vettore di $\mathcal{C}$ rispetto la base $\mathcal{B}$. Di conseguenza è sufficiente prendere i termini dell'i-esima colonna della matrice C come coefficienti della combinazione lineare dei vettori di base $\mathcal{B}$ che mi dà l'i-esimo vettore della base $\mathbb{C}$. Ossia

$$\begin{aligned}
v_1 &= 1 \cdot (1 + 2x + x^2) + 1 \cdot x + 1 \cdot (1 - x^2) = 2 + 3x, \\
v_2 &= 1 \cdot (1 + 2x + x^2) + 0 \cdot x + 1 \cdot (1 - x^2) = 2 + 2x, \\
v_3 &= 2 \cdot (1 + 2x + x^2) + 1 \cdot x + 1 \cdot (1 - x^2) = 3 + 5x + x^2.
\end{aligned}$$

La base è dunque $\mathcal{C} = \{2 + 3x, 2 + 2x3 + 5x + x^2\}$.
Per trovare la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{C}$ è sufficiente collezionare in una matrice le coordinate rispetto la base $\mathcal{E}$ dei vettori appena trovati. Questa matrice sarà:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che la matrice D si scrive anche come $D = BC$.
Una base $\mathcal{C}'$ non può esistere in quanto la matrice C' non è invertibile. Infatti $\det C' = 0$, dunque ha nucleo non banale e l'immagine non genera tutto lo spazio (ossia le immagini dei vettori di base non formano una base).

6 Esercizio

Si consideri $\mathbb{R}^3$ munito del seguente prodotto scalare indefinito

$$\langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Data la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

trovare la matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base $\mathcal{B}$.
Sia la matrice associata ad una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ data da

$$M_{\mathcal{B}.\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Dimostrare che L è simmetrica per il prodotto scalare dato. Trovare la matrice associata a L rispetto la base canonica $\mathcal{E}$.
Notare che tale applicazione simmetrica non è diagonalizzabile.

Soluzione

Per trovare la matrice del prodotto scalare è sufficiente calcolare quest'ultimo per tutte le possibili coppie di vettori di base. Quindi dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned}
&\langle(1,1,0),(1,1,0)\rangle = 0,\\
&\langle(-1,1,0),(1,1,0)\rangle = 2, \quad \langle(-1,1,0),(-1,1,0)\rangle = 0,\\
&\langle(0,0,1),(1,1,0)\rangle = 0, \quad \langle(0,0,1),(-1,1,0)\rangle = 0, \quad \langle(0,0,1),(0,0,1)\rangle = 1.
\end{aligned}$$

La matrice $A_{\mathcal{B}}$ del prodotto scalare rispetto la base $\mathcal{B}$ è data da

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una applicazione lineare L è simmetrica se $\langle Lx, y\rangle = \langle x, Ly\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$. Fissando la base $\mathcal{B}$, ciò è equivalente a richiedere che $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L)^T A_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L)$. Svolgiamo dunque il calcolo:

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L)^T A_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}\\
A_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dunque L è una applicazione simmetrica rispetto il prodotto scalare dato.

Per trovare la matrice associata ad L rispetto alla base $\mathcal{B}$, innanzitutto calcoliamo la matrice del cambiamento di coordinate dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{E}$.

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice associata a L rispetto la base canonica è data dalla magica formula

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(L) &= M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{id}) M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L) M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{id})\\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

L'applicazione non è diagonalizzabile poiché il polinomio caratteristico di L è $-\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 12$, il quale ammette una sola radice reale.

7 Esercizio

Si consideri $\mathbb{R}^3$ munito del seguente prodotto scalare indefinito

$$\langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Indicare un vettore v_0 tale che $\langle v_0, v_0 \rangle = 0$. Fornire le equazioni cartesiane e una base per il sottospazio ortogonale $V^\perp$ di $V := Span\{v_0\} \subset \mathbb{R}^3$. Notare che V e $V^\perp$ non sono in somma diretta.
Dimostrare che il sottoinsieme $C := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, x \rangle = 0\}$ **non** è un sottospazio vettoriale.
Data la matrice [1]

$$\Lambda_\phi = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Dimostrare che, per ogni $\phi \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare associata $L_\phi : x \mapsto \Lambda_\phi x$ è un endomorfismo ortogonale (isometria).
Dire se tale applicazione è diagonalizzabile. Se sì, trovarne autovalori e autospazi e fornire una base $\mathcal{B}$ di autovettori.

Soluzione

Identificare un possibile v_0 è piuttosto semplice, noi sceglieremo $v_0 = (1, 1, 0)$. L'equazione di $V^\perp$ si trova ricordando che per definizione un generico elemento $w \in V^\perp$ soddisfa $\langle w, v_0 \rangle = 0$, questa condizione ci fornisce l'equazione $-x_1 + x_2 = 0$ che identifica $V^\perp$. Una possibile base di $V^\perp$ è dunque composta dai seguenti due vettori: $(1, 1, 0)$ e $(1, 1, 1)$.
I due sottospazi V e $V^\perp$ non sono in somma diretta in quanto $V \cap V^\perp = V$.

C non è un sottospazio vettoriale poiché non è chiuso rispetto la somma. Consideriamo $v_0 = (1, 1, 0)$ e $v_1 = (-1, 1, 0)$, chiaramente $\langle v_0, v_0 \rangle = 0 = \langle v_1, v_1 \rangle$ e dunque $v_0, v_1 \in C$. Però $\langle v_0 + v_1, v_0 + v_1 \rangle = 4$, di conseguenza $v_0 + v_1 \notin C$.

Per dimostrare che l'applicazione L_ϕ sia una isometria dobbiamo verificare che $\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$. O, equivalentemente che $\Lambda^T A_\mathcal{E} \Lambda = A_\mathcal{E}$, dove

[1] Ricordiamo che le funzioni iperboliche sono definite come segue: $\cosh\phi = \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi})$ e $\sinh\phi = \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi})$. Soddisfando così l'equazione $(\cosh\phi)^2 - (\sinh\phi)^2 = 1$.

$A_{\mathcal{E}}$ è la matrice del prodotto scalare rispetto la base canonica. Il calcolo segue:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\cosh\phi & \sinh\phi & 0\\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh\phi & \sinh\phi & 0\\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-\cosh\phi & \sinh\phi & 0\\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh\phi & \sinh\phi & 0\\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Perciò, l'applicazione L_Λ è ortogonale per ogni $\phi \in \mathbb{R}$.

Notiamo che la matrice Λ_ϕ è simmetrica per ogni $\phi \in \mathbb{R}$, dunque, per il teorema spettrale, è diagonalizzabile. Il suo polinomio caratteristico è

$$p_\Lambda(t) = (1-t)(t^2 - 2t\cosh\phi + 1).$$

Le cui radici sono $t_0 = 1$, $t_+ = \cosh\phi + \sinh\phi = e^\phi$, $t_- = \cosh\phi - \sinh\phi = e^{-\phi}$. Notiamo che nel caso $\phi = 0$ i tre autovalori coincidono. In particolare, $L_{\phi=0}$ coincide con l'operatore identità id, di conseguenza ogni vettore è autovettore. Cerchiamo ora gli autovettori nel caso $\phi \neq 0$. L'autovettore riferito all'autovalore t_0 si vede facilmente essere il terzo vettore della base canonica $e_3 = (0,0,1)$. Per quanto riguarda l'autovalore t_+ impostiamo il sistema

$$\begin{pmatrix}\cosh\phi - t_+ & \sinh\phi & 0\\ \sinh\phi & \cosh\phi - t_+ & 0\\ 0 & 0 & 1-t_+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = 0$$

Ottenendo

$$\begin{pmatrix}-\sinh\phi & \sinh\phi & 0\\ \sinh\phi & -\sinh\phi & 0\\ 0 & 0 & 1-e^\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = 0$$

Le prime due righe sono linearmente dipendenti. Nel caso $\phi \neq 0$, l'autospazio V_{t_+} è dunque definito dal sistema di due equazioni lineari:

$$\begin{cases}-x_1 + x_2 = 0,\\ x_3 = 0.\end{cases}$$

Un possibile autovettore è dunque dato dal vettore $v_0 = (1,1,0)$.
Per quanto riguarda l'autovalore t_- il sistema

$$\begin{pmatrix}\cosh\phi - t_- & \sinh\phi & 0\\ \sinh\phi & \cosh\phi - t_- & 0\\ 0 & 0 & 1-t_-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = 0$$

fornisce due equazioni linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix} \sinh\phi & \sinh\phi & 0 \\ \sinh\phi & \sinh\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1-e^{-\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Nel caso $\phi \neq 0$, l'autospazio V_{t_-} è definito dal sistema di due equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Un possibile autovettore è dunque dato dal vettore $v_1 = (-1, 1, 0)$.
Scegliamo come base di autovettori la seguente: $\mathcal{B} = \{v_0, v_1, e_3\}$.

8 Esercizio

Sia $M(n, \mathbb{C})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti complessi con la struttura di spazio vettoriale reale.
Si ricorda la definizione di coniugazione complessa in $\mathbb{C}$. Dato $z \in \mathbb{C}$ il suo complesso coniugato z^* è dato da $z^* = \Re(z) - i\Im(z)$, dove $\Re$ e $\Im$ indicano rispettivamente la parte reale e immaginaria e i l'unità immaginaria. Si consideri ora $M(n, \mathbb{C})$ munito della seguente forma bilineare

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : & M(n, \mathbb{C}) \times M(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{R} \\ & (A, B) \mapsto \Re(tr(AB^\dagger)) \end{aligned}$$

Verificare che si tratta di un prodotto scalare definito positivo.

Si definisce l'applicazione

$$\begin{aligned} L : & M(n, \mathbb{C}) \to M(n, \mathbb{C}); \\ & A = \{a_{ij}\} \mapsto A^\dagger = \{a^*_{ji}\}. \end{aligned}$$

Notare che l'applicazione L è lineare su $M(n, \mathbb{C})$ come spazio vettoriale reale ma non come spazio vettoriale complesso. Dimostrare che l'applicazione L è simmetrica in questo spazio vettoriale metrico. Trovare autovalori e relativi autospazi. Dedurne che L è anche una isometria.
Suggerimento: notare che $L^2 = \text{id}$.

8.1 Soluzione

L'applicazione L è $\mathbb{R}$-lineare. Dati α, β due numeri reali o complessi e $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ si verifica che $L(\alpha A + \beta B) = (\alpha A + \beta B)^\dagger = \bar{\alpha} A^\dagger + \bar{\beta} B^\dagger$. Per cui la proprietà di linearità è soddisfatta solo se $\bar{\alpha} = \alpha$ e $\bar{\beta} = \beta$, ossia $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. In analogia con la coniugazione complessa in $\mathbb{C}$.

Per verificare che si tratti di un prodotto scalare dobbiamo verificarne che sia simmetrico e non degenere.
La simmetria segue da un semplice conto, siano $A, B \in M(n, \mathbb{C})$

$$\langle B, A\rangle = \Re(tr(BA^\dagger)) = \Re(tr((AB^\dagger)^\dagger)) = \Re(tr(AB^\dagger)^*) = \Re(tr(AB^\dagger)) = \langle A, B\rangle.$$

Il prodotto scalare è non degenere se $\langle A, A\rangle \neq 0$, $\forall A \neq 0 \in M(n, \mathbb{C})$. Calcoliamo dunque $\langle A, A\rangle$ con $A = \{a_{ij}\}$,

$$\langle A, A\rangle = \Re(tr(AA^\dagger)) = \Re\left(\sum_{i,j}(A)_{ij}(A^\dagger)_{ji}\right) = \Re\left(\sum_{i,j} a_{ij}a_{ij}^*\right) = \sum_{i,j}|a_{ij}|^2$$

Essendo una somma di numeri reali non-negativi, $\langle A, A\rangle$ sarà nullo solo se tutti i termini della somma sono nulli, ossia $a_{ij} = 0\, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, altrimenti sarà positivo. Abbiamo in questo modo mostrato anche la positività.

Dimostriamo che L è simmetrica:

$$\langle L(A), B\rangle = \Re(tr(A^\dagger B^\dagger)) = \Re(tr((BA)^\dagger)) = \Re(tr(BA)) = \Re(tr(AB)) = \langle A, L(B)\rangle.$$

Per il teorema spettrale allora esiste una base ortonormale di autovettori per L. Troviamo innanzitutto gli autovalori: poiché $L^2 = \mathrm{id}$ gli unici autovalori possibili sono ± 1. Dunque le equazioni agli autovalori sono

$$\begin{aligned} L(A) = A \quad &\Longrightarrow \quad A^\dagger = A, \\ L(A) = -A \quad &\Longrightarrow \quad A^\dagger = -A. \end{aligned}$$

Risulta così evidente che gli autospazi corrispondenti sono: lo spazio delle matrici hermitiane, corrispondente all'autospazio di autovalore 1, e lo spazio delle matrici antihermitiane, corrispondente all'autospazio di autovalore -1.

Il fatto che L è una isometria discende dalla simmetria e dalla proprietà $L^2 = \mathrm{id}$. Siano $A, B \in M(n, \mathbb{C})$

$$\langle L(A), L(B)\rangle = \langle A, L^2(B)\rangle = \langle A, B\rangle.$$