Geometria - Canale 4

Anno accademico 2024/25

Prova scritta - 27 gennaio 2025

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Numero di matricola: ____________________

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{R}$, di 4 equazioni nelle 3 incognite x, y, z, dipendente dal parametro reale k:

$$\begin{cases} x + 2kz = 1 \\ kx + (k+1)z = 2 \\ x - ky - z = -1 \\ 2kx + y = 3, \end{cases}$$

(a) Al variare del parametro k, calcolare il determinante della matrice completa A.

(b) Determinare per quali valori del parametro k il sistema ha soluzione.

(c) Per tali valori di k determinare il numero di soluzioni.

Risoluzione:

Risposta:

(a) $\det A = \boxed{}$, (b) $k = \boxed{}$, (c) # sol. $= \boxed{}$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}_2[t]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado al più 2 nella variabile t e sia $f : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ tale che $f(1+t) = 1 + 4t + 5t^2$, $f(-t^2) = -2 + t - t^2$ e $f(t + t^2) = 1 + 2t + 3t^2$.

(a) Dire se f è unicamente determinata ;

(b) determinare una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) determinare una base di $\mathrm{Ker}(f)$.

Risoluzione:

Risposta:

(a) f è unicamente determinata? **SI** $\setminus$ **NO**. Perché?

(b) Base di $\mathrm{Im}(f)$: , (b) Base di $\mathrm{Ker}(f)$:

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + 2y - z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice A associata a f rispetto alla base standard;

(b) Determinare gli autovalori della matrice associata a f.

(c) Determinare, se esiste, una base $\mathcal{B}$ ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard) di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per f.

Risoluzione:

Risposta:

(a) $A =$ $\boxed{}$, (b) Autoval.: $\boxed{}$, (b) $\mathcal{B} =$ $\boxed{}$

Esercizio 4. Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica tale che

$$\begin{aligned}\phi((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) :=& 2(x_1y_1 + x_3y_4 + x_4y_3) - x_2y_2 + 3x_3y_3 + 4(x_1y_2 + x_2y_1 - x_4y_4) \\ & - x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.\end{aligned}$$

Determinare

(a) la matrice A associata a ϕ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$;

(b) se ϕ è degenere o non-degenere;

(c) la segnatura di ϕ.

Risoluzione:

Risposta:

(a) $A =$ $\boxed{}$, (b) ϕ degenere? **SI** $\setminus$ **NO** , (b) Segnat.: $\boxed{}$

Foglio per brutta copia

Foglio per brutta copia