Geometria - Canale 4

ANNO ACCADEMICO 2024/25

Prova scritta - 12 febbraio 2025

Cognome: _____

Nome: _____

Numero di matricola: _____

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione priva di motivazione riceverà 0 punti.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{C}_3[t]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}$ di grado al più 3 nella variabile t e sia

$$V := \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathbb{C}_3[t] \mid a_0 + a_2 - a_3 = 0, a_0 + a_1 - a_2 = 0\}$$

- (a) Verificare che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}_3[t]$.
- (b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di V .
- (c) Determinare un complementare W di V in $\mathbb{C}_3[t]$.

Risoluzione:

Risposta: (b) $\mathcal{B} =$

, (c) $W =:$

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $T : \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ dello spazio delle matrici 3×3 a coefficienti reali, dato da

$$T(A) = A - A^t,$$

dove A^t denota la trasposta della matrice A .

- (a) Determinare il nucleo di T e la sua dimensione.
- (b) Determinare autovalori e autospazi di T .
- (c) Determinare il polinomio caratteristico $p_T(x)$ di T e dire se T è diagonalizzabile.

Risoluzione:

Risposta:

(a) $\ker T =$, $\dim(\ker T) =$

(b) autovalori di T : , autospazi di T :

(c) $p_T(x)$: , T è diagonalizzabile? **SI \ NO**

Esercizio 3. Sia $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tale che:

i. $\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + z = 0, 2x + y + 2z = 0 \right\};$

ii. T ha autovalore -2 con molteplicità geometrica 2 ;

iii. $\text{im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z = 0 \right\}.$

(a) Dire se, in base alle condizioni imposte, T sia necessariamente diagonalizzabile.

(b) Determinare il polinomio caratteristico $p_T(x)$ di T .

(c) Determinare la matrice di T nella base standard di $\mathbb{R}^3$.

Risoluzione:

Risposta: (a) T è diagonalizzabile? **SI** \ **NO**

(b) $p_T(x) =$;

(c) $T =$

Esercizio 4. Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & a \end{pmatrix}$ la matrice associata ad una forma bilineare e simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$.

- (a) Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che ϕ sia degenere;
- (b) per tali a determinare la segnatura di ϕ
- (c) per tali a determinare il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $V := \{(x, y, z) \mid x - y - 3z = 0\}$.

Risoluzione:

(a) $a = \boxed{}$;

(b) segnatura: $\boxed{}$;

(c) $V^\perp =$

FOGLIO PER BRUTTA COPIA

FOGLIO PER BRUTTA COPIA

FOGLIO PER BRUTTA COPIA