Geometria - Ingegneria Aerospaziale

Proff. A. De Sole, S. Molcho

Secondo appello, 2/2/2025

Nome: ____________________________________

Cognome: ____________________________________

Numero di matricola: __________________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

Esercizio 1. Sia $V \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ il sottospazio generato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

e sia $W \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ il sottospazio formato dalle matrici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tali che

$$c - b + a = 0\,,\ 2a - c + d = 0\,,\ a + 3b - 5c + 2d = 0\,.$$

Determinare le dimensioni di V, W, $V \cap W$ e $V + W$.

Soluzione:

Risposta: $\dim(V) = \boxed{}$, $\dim(W) = \boxed{}$, $\dim(V \cap W) = \boxed{}$, $\dim(V + W) = \boxed{}$

Esercizio 2. Dire se la seguente affermazione è vera, fornendo un'opportuna dimostrazione, oppure è falsa, indicando un controesempio:

Affermazione: Se A e B sono entrambe matrici 7×7 di rango 3, allora i sistemi lineari omogenei $Ax = 0$ e $Bx = 0$ (di 7 equazioni in 7 incognite) hanno almeno una soluzione non nulla in comune.

Soluzione:

Risposta: Vero $\setminus$ **Falso** (cerchiare la risposta corretta)

Dim. $\setminus$ Ex.

Esercizio 3. Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione:

Risposta: $\det(A) = \boxed{}$

Esercizio 4. Calcolare A^{100} per la matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

Risposta: $A^{100} = \boxed{}$

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^3$ si considerino il prodotto scalare

$$\langle X, Y \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1$$

ed il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \;,\quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare la segnatura di tale prodotto scalare.

(b) Trovare una base del sottospazio W che sia ortogonale rispetto al dato prodotto scalare.

Soluzione:

Risposta: (a) Segnatura: $\boxed{}$; (b) Base: $\boxed{}$

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia