# Lezione 5: Dipendenza e indipendenza lineare

Abbiamo visto varie operazioni tra i vettori, in particolare abbiamo più volte determinato vettori ottenuti con operazioni del tipo:

$$3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}, \qquad -\mathbf{u} + \sqrt{2}\mathbf{v}, \qquad \mathbf{u} - \mathbf{v}, .....$$

Diamo un nome ad espressioni di questo tipo:

**Definizione 38** *Dati $n$ vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,...,$\mathbf{v}_n$ (di $E^2$ o di $E^3$) diremo che un vettore $\mathbf{v}$ è* **combinazione lineare** *di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,...,$\mathbf{v}_n$ se esistono $n$ numeri reali $\lambda_1$, $\lambda_2$,...., $\lambda_n$ in modo che (tali che)*

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + .... + \lambda_n\mathbf{v}_n \, .$$

*Gli scalari $\lambda_1$, $\lambda_2$,...., $\lambda_n$ si dicono i* **coefficienti** *della combinazione lineare.*

**Esempio 39** Fissiamo tre vettori del piano $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3 \in E^2$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$4\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - 5\mathbf{u}_3$ è una combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$. Oppure consideriamo

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix} ,$$

è chiaro che, per come è stato definito, il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix}$ è una combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$.

**Domanda 40** Posso scrivere il vettore $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$? Ossia posso trovare due numeri reali $\lambda$ e $\mu$ tali che sia

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

In altri termini, posso ottenere $\mathbf{u}$ come risultante dei vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ a patto di allungarli, accorciarli o eventualmente cambiargli di verso?

Proviamo a capirlo graficamente:

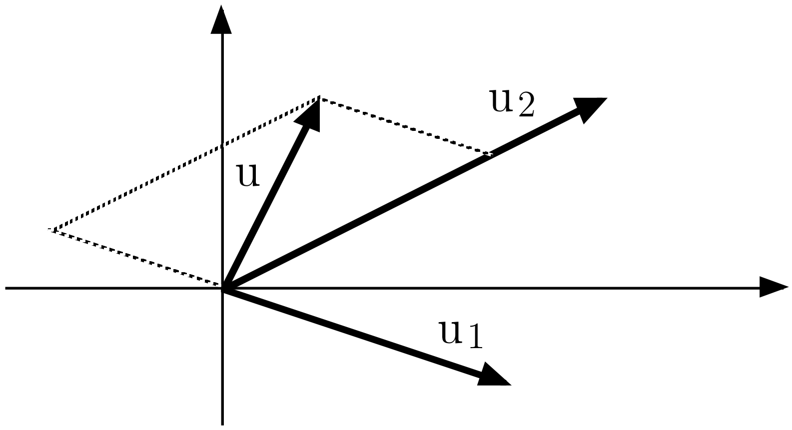


Figura 33: SI!

Chiaramente la risposta è si! Basta tracciare le parallele ai due vettori per il punto $(1, 2)$ e quando incontrano le rette su cui giacciono i due vettori abbiamo determinato quanto allungare o accorciare $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$.

Vediamolo algebricamente. Dobbiamo trovare $\lambda$ e $\mu$ tali che

$$\begin{cases} 3\lambda + 4\mu = 1 \\ -\lambda + 2\mu = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 6\mu - 6 + 4\mu = 1 \\ \lambda = 2\mu - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 10\mu = 7 \\ \lambda = 2\mu - 2 \end{cases}$$

da cui si ha $\mu = 7/10$ e $\lambda = -3/5$...che è anche coerente con l'idea che ci si fa osservando il disegno.

**Domanda 41** È possilbile scrivere $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$? La risposta è chiaramente: no. Infatti i vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ "vivono" sul piano $xz$ e così è per tutti i parallelogrammi per l'origine costruiti con le loro direzioni. D'altronde anche algebricamente si capisce subito che qualunque siano $\lambda$ e $\mu$ si ha sempre

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ 0 \\ 3\lambda + \mu \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ossia tutte le combinazioni lineari di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ hanno la seconda componente nulla mentre $\mathbf{u}$, che non giace sul piano $xz$, no.

Quindi abbiamo visto che, dato un insieme di vettori (del piano o dello spazio) a volte è possibile scriverne uno come combinazione lineare degli altri e a volte no.

**Definizione 42** *Dato un insieme di vettori (di $E^2$ o di $E^3$) questi si dicono* **linearmente dipendenti** *se almeno uno di essi si può scrivere come combinazione lineare degli altri. Altrimenti si dicono* **linearmente indipendenti***.*

**Attenzione:** Questa è una definizione delicata e importante. Per capirla meglio vedremo vari esempi e cercheremo di sottolinearne il significato geometrico.

Dagli esempi visti nelle Domande 40 e 41 si deduce che i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti. Mentre i vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti. Infatti non è ovviamente possibile scrivere $\mathbf{u}_1$ o $\mathbf{u}_2$ come combinazione lineare dei rimanenti (verificarlo).

**Osservazione** Prendiamo tre vettori linearmente dipendenti $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, per esempio, tali che

$$\mathbf{u}_3 = 2\mathbf{u}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{u}_2.$$

Quindi visto che in questa equazione compaiono tutti e tre i vettori (ossia non ci sono coefficienti nulli) posso esplicitare anche $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ rispetto agli altri

$$\mathbf{u}_2 = 4\mathbf{u}_3 - 8\mathbf{u}_1 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{u}_3 - \frac{1}{8}\mathbf{u}_2$$

Vediamo altri esempi:

**Esempio 43** Il vettore $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$? NO!

Infatti $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono sulla stessa retta e se li sommo resto sulla stessa retta, mentre $\mathbf{u}$ non ci sta!

Proviamolo algebricamente: dovrebbero esistere due numeri reali $\lambda$ e $\mu$ tali che

$$\lambda \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \sqrt{2}\lambda + \mu = 3 \\ 2\lambda + \sqrt{2}\mu = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \mu = 3 - \sqrt{2}\lambda \\ 2\lambda + 3\sqrt{2} - 2\lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 3 - \sqrt{2}\lambda \\ 3\sqrt{2} = 1 \end{cases} \quad \text{FALSO!!}$$

Quindi questi due numeri non possono esistere. Vi convince? Beh! questo è un ragionamento per assurdo: abbiamo supposto che potessero esistere e abbiamo ottenuto una contraddizione, da cui deduciamo che l'ipotesi che esistano non può essere fatta (cioè non esistono).

**Attenzione:** Un buon modo di controllare che $n$ vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ siano tra loro linearmente indipendenti è di verificare che l'unico modo di scrivere il vettore nullo come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ è quello di usare tutti coefficienti nulli.

Detta così non è chiaro? Abbiamo bisogno di dirlo "in formule"? Vediamo se si capisce meglio con un enunciato rigoroso.

**Proposizione 44** *I vettori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n$ *sono linearmente indipendenti se l'equazione*

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{3}$$

*implica* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Dimostrare questa affermazione è facile. Infatti se esistessero dei coefficienti $\lambda_1$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, non tutti nulli per cui vale (3), allora ce ne sarebbe almeno uno non nullo, immaginiamo che sia $\lambda_1$ e quindi potremmo scrivere il vettore corrispondente a quel coefficiente, in questo caso sarebbe $\mathbf{v}_1$, come combinazione lineare degli altri. Basterebbe infatti dividere l'equazione (3) per $\lambda_1$ e ottenere

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathbf{v}_n$$

e quindi i vettori sarebbero linearmente dipendenti. Questo argomento non si può usare solo se tutti i coefficienti in (3) sono nulli e quindi questa è chiaramente una condizione equivalente all'essere indipendenti.

**Esempio 45** Vediamo se i vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti o indipendenti. La cosa che dobbiamo fare (per quanto appena detto) è cercare di capire quali sono le terne $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ che verificano

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Questa chiaramente si traduce in tre equazioni nelle incognite $\lambda_1$, $\lambda_2$ e $\lambda_3$. Ossia è equivalente a risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0\,. \end{cases}$$

nelle incognite $\lambda_1$, $\lambda_2$ e $\lambda_3$. Faremo i sistemi in generale tra non molto e svilupperemo una tecnica per risolverli anche nei casi in cui questi presentino molte equazioni e molte incognite, ma in questo caso non ne abbiamo bisogno, questo sistema si risolve facilmente a mano. Basta infatti scrivere nelle prime due equazioni $\lambda_2$ e $\lambda_3$ in funzione di $\lambda_1$ e sostituirli nella terza equazione. Facendo questo si ottiene

$$\begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_1 = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0\,. \end{cases}$$

In conclusione i tre vettori sono indipendenti.

E se avessimo avuto i vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Vi faccio notare che in questo caso si vede a occhio che $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ e quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti. Ma diciamo che non l'abbiamo visto a occhi, proviamo a dimostrarlo usando il metodo suggerito dalla Proposizione 44. Proviamo a risolvere il sistema

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0\,. \end{cases}$$

Se analogamente a prima esplicitiamo $\lambda_2$ e $\lambda_3$ e li sostituiamo nella terza equazione, otteniamo

$$\begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

da cui deduciamo che tutte le terne del tipo $(\lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_1)$ sono soluzioni, per esempio $(1, -1, -1)$ è soluzione del sistema (verificatelo). Ma questo ci dice allora che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ossia abbiamo dedotto quello che avevamo già osservato e che ci dice che i vettori sono dipendenti.

**Domanda:** Come sono fatti due vettori linearmente dipendenti? Ossia cosa significa che un vettore si può scrivere come combinazione lineare di un altro? Direttamente dalla definizione specializzata al caso di due vettori: due vettori sono dipendenti se sono proporzionali, se uno è multiplo dell'altro

$$\mathbf{u}_1 = \lambda \mathbf{u}_2$$

quindi se stanno sulla stessa retta!

In generale:

*Due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se stanno sulla stessa retta.*

**Conclusione:** Per determinare tutti i vettori che giacciono su una stessa retta basta un solo vettore (gli altri saranno tutti i multipli di questo).

Ora facciamo un altro tentativo. Prendiamo due vettori qualsiasi del piano non proporzionali (non allineati). La domanda è questa: posso ottenere tutti i vettori del piano come combinazione lineare di questi due vettori? Ossia partendo dall'origine posso raggiungere tutti i punti del piano muovendomi sono lungo queste due direzioni distinte? La risposta è SI! E la costruzione grafica necessaria per convincercene (più avanti sarete in grado di verificarlo rigorosamente/algebricamente) è la stessa che abbiamo usata nella Figura 33, che si può fare per qualunque punto con una qualsiasi coppia di direzioni distinte.

Quindi se in $E^2$ (o in $E^3$) prendiamo una qualsiasi coppia di vettori indipendenti, cioè non allineati, si possono scrivere tutti gli altri vettori del piano (o del piano su cui questi giacciono) come combinazione lineari di questi.

Quindi:

*Tre vettori sono dipendenti se e solo se giacciono sullo stesso piano*

**Conclusioni:** Tre vettori di $E^2$ sono sempre linearmente dipendenti, cioè 2 è il numero massimo di vettori linearmente indipendenti in $E^2$. Quindi bastano due vettori non allineati per derminare tutti gli altri come loro combinazione lineare. Questo è il motivo per cui si dice che il piano è **bi**dimensionale.

A questa proprietà diamo un nome:

**Definizione 46** *Un insieme di vettori (di $E^2$ o $E^3$) linearmente indipendenti con i quali si ottengono tutti gli altri vettori (di $E^2$ o $E^3$) come loro combinazione lineare si dice una* **base** *(di $E^2$ o $E^3$).*

In particolare, abbiamo visto sopra, che nel piano due vettori indipendenti (non allineati) formano sempre una base. Il piano ha **dimensione** 2. Inoltre ci si può convincere (quantomeno graficamente usando la costruzione del palallelogramma) che usando i vettori della base (che sono vettori indipendenti!) tutti gli altri si scrivono come loro combinazione lineare in **modo unico**. In parole povere qualunque sia la base, dato un vettore $\mathbf{u}$, c'è un SOLO modo di allungare e/o accorciarcire (eventualmente cambiando verso) i vettori della base per ottenere $\mathbf{u}$.

**Esempio 47** Noi finora, senza saperlo, abbiamo usato una base per i vettori del piano, la cosiddetta **base canonica di** $E^2$, ossia la base formata dai vettori

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

Che abbiamo già visto come esempio di vettori in $E^2$. La chiamiamo base proprio perché (come già notato) un qualsiasi vettore $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ del piano si può banalmente scrivere come combinazione lineare di $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Quindi quelle che finora abbiamo chiamato le componenti del vettore non sono altro che i coefficienti della combinazione lineare con cui si ottiene $\mathbf{u}$ con la base canonica.

Analogamente a quanto visto per il piano ci si può altrettanto convincere che bastano tre vettori indipendenti dello spazio (non contenuti nello stesso piano) per raggiungere tutti i punti dello spazio.

In altri termini lo spazio è **tri**dimensionale (la dimensione è 3) e una qualunque terna di vettori indipendenti forma una base di $E^3$.

Di conseguenza

*Quattro vettori dello spazio sono sempre linearmente dipendenti*

Infatti se così non fosse potrei trovare quattro vettori indipendenti (ognuno dei quali non può essere scritto come combinazione lineare dei rimanenti). Ma allora ne tolgo uno e mi rimangono ancora tre vettori indipendenti. Ma allora questi, per quanto detto prima, sono una base. Ma allora posso scrivere il quarto vettore (quello che ho tolto) come loro combinazione lineare. E no! Questo contraddice il fatto che ero partita da quattro vettori indipendenti. Di conseguenza (ancora una volta un ragionamento per assurdo!) l'unica possibilità è che non si possa mai partire da quattro vettori indipendenti nello spazio $E^3$.

Più in generale quando parliamo di **dimensione** di uno spazio vettoriale intendiamo il numero minimo di vettori con cui si riesce a scrivere tutti gli altri (ossia il numero di vettori che servono per formare una base in quello spazio).

**Esempio 48** Anche nello spazio usiamo implicitamente la **base canonica**, ossia la base formata dai vettori

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quando scriviamo un vettore usando le componenti.

Vi ricordate l'esempio dei polinomi di grado al più 3? Avevamo detto che è uno spazio vettoriale.

Prendiamo un polinomio qualsiasi

$$x^3 + 3x^2 - x + 4 = 1 \cdot (x^3) + 3 \cdot (x^2) + (-1) \cdot (x) + 3 \cdot 1\,.$$

L'ho scritto così per farvi notare che si può scrivere come combinazione lineare dei polinomi $x^3$, $x^2$, $x$ e 1. Ma allora quale sarà, secondo voi, la base canonica in questo spazio?

Concludo questa lezione generalizzando quello che abbiamo visto finora. Abbiamo capito che hanno una struttura di spazio vettoriale l'insieme delle quaterne di numeri reali (che per esempio possiamo identificare con i polinomi di grado al più 3) e l'insieme delle cinquine di numeri reali. In gelerale diremo che uno **spazio vettoriale di dimensione** $n$, e lo indicheremo con $V^n$, è un insieme che si può identificare con l'insieme delle $n$-ple (si pronuncia "ennuple", plurale di "ennupla" che vuol dire collezione di $n$ elementi) di numeri reali tra le quali possiamo introdurre tutte le operazioni che abbiamo definito finora in termini delle componenti (prodotto vettoriale escluso se $n \neq 3$!). Continueremo a chiamare gli elementi di questi spazi "vettori". Per questi vettori possiamo quindi considerare la nozione di combinazione lineare e così quella di lineare dipendenza e indipendenza (vedrete che ci sarà utile a breve), esattamente come abbiamo fatto per i vettori di $E^2$ e $E^3$, con l'unica differenza che in generale in $V^n$ non ne possiamo dare le stesse interpretazioni geometriche.

**Esempio 49** Questa

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

è una combinazione lineare di vettori in $V^5$. Il vettore che si ottiene è

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi questi quattro vettori formano un insieme di vettori linearmente dipendenti.