

ESERCITAZIONE N.4

1. Verificare che la funzione $y(x) = xe^{x^2}$ sia una soluzione della seguente equazione differenziale

$$y'' = 2xy' + 4y.$$

2. Data la funzione $y(x) = \cos^2 x$ dire quali delle seguenti equazioni differenziali risolve

$$y'''' = 2 \cos x \sin x \quad y'''' = -4y' \quad y'''' = 2 - 4y \quad y'' = 2 - 4y$$

3. Data la funzione $y(x) = x^3 \sin x$ dire quale delle seguenti equazioni differenziali risolve

$$y'' = 6y' - 12y - y \quad y'' = \frac{6}{x}y - \left(\frac{12}{x^2} + 1\right)y' \quad y'' = \frac{6}{x}y' - \left(\frac{12}{x^2} + 1\right)y$$

4. Determinare per separazione di variabili l'integrale generale delle seguenti equazioni

(a) $y' = x(1 - y)^2$

(b) $y' = \frac{1}{xy}$

(c) $y' = e^{2y}x$

5. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni del primo ordine

(a) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}y$

(b) $y' = x^2y$

(c) $y' = (x + 2)y$

(d) $y' = e^x y$

(e) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}y + 2\frac{1}{\cos^2 x}$

(f) $y' = x^2y + 4x^2$

(g) $y' = xy - 3x$

6. Determinare le soluzioni dei problemi di Cauchy associati alle equazioni considerate nell'esercizio precedente con condizioni iniziali date rispettivamente da:

a) $y(0) = 2$ b) $y(1) = e$ c) $y(-1) = 0$

d) $y(0) = -1$ e) $y(0) = 1$ f) $y(1) = 4e$ g) $y(2) = 3$.

7. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (\sin x)y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

8. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (\sin x)y - 2 \sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

9. Determinare il polinomio caratteristico associato alle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti

(a) $y'' + 2y' + 3y = 0$

- (b) $y'' - 2y' = 0$
- (c) $y'' + 2y' - 3y = 0$
- (d) $y'' - 4y' + 4y = 0$
- (e) $2y'' - y = 0$
- (f) $y'' + 3y' - y = 0$
- (g) $y'' - 4y = 0$

10. Determinare l'integrale generale delle equazioni differenziali dell'esercizio precedente.

11. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

12. Determinare tutte le funzioni che sono soluzioni dell'equazione $y'' - y = 0$ e che verificano la condizione $y(0) = 1$

13. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

14. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni non omogenee

- (a) $y'' + 2y' + 3y = 1$
- (b) $y'' - 2y' = e^x$
- (c) $y'' + 2y' - 3y = \cos 2x$
- (d) $y'' - 4y' + 4y = 3x$
- (e) $2y'' - y = 2$
- (f) $y'' + 3y' - y = \sin 3x$
- (g) $y'' - 4y = x^2$

15. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' + y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

16. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = x + 1 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$