Corso di Laurea in Informatica a.a.2015-16
Esercizi di Probabilità, parte settima
Marco Isopi

Esercizio 1. A, B, e C sono tre eventi di probabilità $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ rispettivamente.

a) Indicando con Xil numero di quanti fra questi eventi saranno verificati, calcolare $\mathbf{E}(X)$

b) Qual è la probabilità che se ne verifichi almeno uno $(X \geq 1)$ se i tre eventi sono a due a due incompatibili?

c) Qual è la probabilità che se ne verifichi almeno uno $(X \geq 1)$ se i tre eventi sono completamente indipendenti?

Esercizio 2. Due amici Alberto e Bruno contemporaneamente sparano successivi colpi contro uno stesso bersaglio. Alberto colpisce il bersaglio il 70% delle volte, mentre Bruno lo colpisce il 90%.

Si supponga che gli eventi A_k ={*Alberto colpisce il bersaglio al k-esimo colpo*} e B_k ={*Bruno colpisce il bersaglio al k-esimo colpo*}, $k = 1, 2, ...$ siano completamente indipendenti.

a) Calcolare la probabilità degli eventi
E ={*entrambi colpiscono il bersaglio al primo colpo*}
F ={*solo* 1 *tra Alberto e Bruno colpisce il bersaglio al primo colpo*}
G ={*nessuno colpisce il bersaglio al primo colpo*}

b) Sapendo che, al primo colpo, il bersaglio è stato colpito da un solo giocatore, calcolare la probabilità che il bersaglio sia stato colpito da Alberto.

c) Si considerino i primi 10 colpi e si indichi con Z il numero dei colpi, fra questi, in cui il bersaglio è stato colpito da entrambi i giocatori; scrivere la distribuzione di probabilità di Z.

Esercizio 3. Trovare il valore atteso del numero di semi in una mano di poker.

Esercizio 4. Un libro delle scommesse suggerisce la seguente "strategia vincente" per il gioco della roulette. Raccomanda che si scommetta un euro sul rosso. Se esce il rosso (che ha probabilità pari a $18/37$ di uscire), allora il giocatore deve prendere la sua vincita di un euro e andarsene. Se invece perde la prima giocata (evento di probabilità pari a $19/37$), deve fare una ulteriore giocata di 1 euro per i successivi due giri della roulette e quindi lasciare il gioco. Denotiamo con X la variabile aleatoria che indica la vincita del giocatore quando lascia il tavolo.

a) Si determini $\mathbf{P}(X > 0)$;

b) Siete d'accordo che questa sia effettivamente una strategia vincente?

c) Si determini $\mathbf{E}(X)$.

Esercizio 5. Un'urna contiene 112 dadi di cui 56 sono equilibrati, mentre gli altri sono stati manipolati in modo che la probabilità di ottenere 1 sia $\frac{1}{2}$, mentre quella di ottenere gli altri 5 valori sia $\frac{1}{10}$. Un dado viene estratto a caso e lanciato. Indichiamo con X il risultato del lancio.

a) Quanto vale $\mathbf{P}(X = 3)$?

b) Quanto vale $\mathbf{E}(X)$?

Esercizio 6. X ed Y sono variabili aleatorie a valori, rispettivamente, negli insiemi

$$\{-2, 0, 2\}, \qquad \{-3, 1, \frac{3}{2}, 2\}.$$

La loro distribuzione di probabilità congiunta è indicata nella seguente tabella, essendo ρ una costante positiva assegnata:

$Y \diagdown X$	-2	0	2
-3	0.1	0	ρ
1	0	0.1	0.15
$3/2$	0.15	0.05	0.05
2	0.2	0.05	0.1

a) Determinare il valore di ρ.

b) Determinare la distribuzione di probabilità marginale delle variabili X e Y.

c) Ricavare la distribuzione di probabilità condizionata di Y, dato $\{X = 0\}$.

d) Le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti?

e) Calcolare $\mathbf{P}(Y < X)$.

Esercizio 7. Tre urne U_1, U_2 ed U_3 contengono ciascuna 5 palline, numerate da 1 a 5. Da ciascuna urna si estrae una pallina in modo casuale. Si indichino con N_1, N_2, N_3 i tre numeri ottenuti e si ponga

$$X = \max(N_1, N_2) \qquad Y = \max(N_1, N_3).$$

a) Calcolare la distribuzione di probabilità di X.

b) Costruire la tabella della distribuzione di probabilità congiunta di X ed Y.

c) Calcolare la distribuzione di probabilità condizionata di Y, dato $\{X = 4\}$.

d) Le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti?

Esercizio 8. Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono 4. Sia X il numero di assi e Y il numero di re che si trovano fra le carte estratte.

a) Calcolare $\mathbf{E}(X)$ e $\mathbf{V}ar(X)$

b) Calcolare $\mathbf{E}(\frac{X}{X+Y}\,|X+Y>0)$

c) Calcolare $\mathbf{E}(X|Y=k)$ al variare di k.

d) Calcolare $\mathbf{C}ov(X,Y)$, per esempio utilizzando il risultato del punto **c)**.

Esercizio 9. Marco gioca al seguente gioco del lotto semplificato: da un'urna che contiene 10 palline numerate da 1 a 10, si estraggono senza reinserimento 4 palline. Marco punta sulla coppia di numeri $\{5,10\}$. Sia X la variabile aleatoria che conta quanti numeri indovina Marco, ossia quanti fra i numeri $\{5,10\}$ vengono estratti.

a) Individuare il tipo di distribuzione di X, e calcolarne il valore atteso e la varianza.

Anche Luca e Andrea giocano insieme a Marco. Luca punta sulla terna di numeri $\{1,5,10\}$, e sia Y la variabile aleatoria che conta i numeri indovinati da Luca. Invece Andrea lancia una moneta ben equilibrata: se esce testa punta sulla coppia $\{5,10\}$, mentre se esce croce punta sulla terna di numeri $\{1,5,10\}$. Sia Z la variabile aleatora che conta quanti sono i numeri individuati da Andrea.

b) Scrivere in termini degli eventi $T=\{\text{esce testa}\}$ e $C=\{\text{esce croce}\}$ e delle variabili aleatorie, i seguenti eventi E,F,G, ed A, e calcolarne le probabilità:

$$\begin{aligned}
E &= \{\text{Marco non indovina neanche un numero}\}\\
F &= \{\text{Luca non indovina neanche un numero}\}\\
G &= \{\text{Andrea non indovina neanche un numero}\}\\
A &= \{\text{Sia Marco che Andrea non indovinano neanche un numero}\}.
\end{aligned}$$

c) Sapendo che Andrea non ha indovinato neanche un numero, calcolare la probabilità che sia uscita testa e che sia uscita croce.