

Esercizi di Calcolo delle Probabilità, a.a.2016-17
nono foglio di esercizi
M. Isopi

Esercizio 1. Una coppia di dadi perfetti a sei facce viene lanciata n volte ed indichiamo con S_n il numero dei lanci in cui il maggiore fra i due punteggi risulta maggiore o uguale a 5.

Calcolare il minimo valore di n per il quale, in base alla disuguaglianza di Chebishev, si possa scrivere

$$\mathbf{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - \frac{5}{9} \right| > \frac{1}{30} \right) \leq \frac{1}{10}$$

Esercizio 2. Una moneta dà testa con probabilità p . La moneta viene tirata n volte e si osserva la percentuale \bar{Y}_n di teste uscite su n lanci. Quanto deve essere grande n affinché con probabilità maggiore di 0.99 l'errore commesso (cioè la differenza tra p e \bar{Y}_n) sia al più 0.1?

Esercizio 3. Siano X_1, \dots, X_{100} variabili aleatorie indipendenti, ciascuna con la seguente distribuzione di probabilità

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_j = 0) &= 0.45 - p & \mathbf{P}(X_j = 1) &= 0.25 \\ \mathbf{P}(X_j = 0.5) &= 0.3 & \mathbf{P}(X_j = 2) &= p \end{aligned}$$

dove $0 < p < 0.45$ è un parametro.

- a) Trovare il valore di p per cui risulta $\mathbf{E}(X_j) = 1$.
- b) In corrispondenza al valore di p trovato nel precedente punto, calcolare la varianza di X_j .
- c) Ancora in corrispondenza allo stesso valore di p , posto

$$Y = \frac{\sum_{j=1}^{100} X_j}{100}$$

trovare la minorazione per la probabilità $\mathbf{P} \left(|Y - 1| \leq \frac{1}{5} \sqrt{\frac{21}{40}} \right)$ che si ottiene utilizzando la diseguaglianza di Chebyshev.

Esercizio 4.

Un quiz televisivo prevede due partecipanti (A, B), avversari fra loro.

Il presentatore propone sequenzialmente 4 domande.

Viene scelto a caso il giocatore cui viene rivolta la prima domanda. Se questi risponde, gli viene presentata la seconda domanda, e così via finchè non sbaglia una risposta.

Soltanto quando questi sbaglia, il gioco passa all'altro giocatore, cui viene rivolta la stessa domanda.

Se nessuno dei due risponde a una domanda si passa alla successiva; ed il gioco continua così di seguito fino all'esaurimento delle 4 domande.

Ciascun giocatore ha una probabilità $\frac{1}{2}$ di dare risposta esatta a qualunque domanda gli venga rivolta.

Sia X_A il numero delle risposte esatte date da A , X_B il numero delle risposte esatte date da B e X_C il numero delle domande cui non è stata data risposta esatta (né da A , né da B).

- a) Trovare la probabilità che una specifica domanda non riceva risposta esatta
- b) Qual è la distribuzione di probabilità di X_C ?

Supponiamo che questo tipo di quiz venga ripetuto per 100 serate consecutive ed indichiamo con Y_{100} il numero delle serate in cui si osserva il risultato $\{X_C = 2\}$.

- c) Calcolare il valore atteso e la varianza di $\frac{Y_{100}}{100}$.
- d) Usare la disuguaglianza di Chebyshev per maggiorare $\mathbf{P}(|Y_{100} - \frac{675}{32}| > 12)$.
- e) In una singola serata, qual è la probabilità dell'evento $\{X_A = 1, X_B = 1\}$?

Esercizio 5.

Sia X_n una variabile di Poisson di parametro n . Mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} > 1 + \varepsilon\right) = 0$$