Calcolo delle probabilità

M. Isopi A.A. 2016/2017

Soluzioni esonero del 21/12/2016

1. $\mathbf{E}(3X - 2Y) = -9;$
 $\mathbf{E}[(3X - 2Y)^2] = \mathbf{E}[(3X - 2Y)]^2 + \mathbf{Var}(3X - 2Y) =$
 $\mathbf{E}[(3X - 2Y)]^2 + 9\mathbf{Var}(X) + 4\mathbf{Var}(Y) = 81 + 18 + 4 = 103$

2. Dai dati del problema si deduce che il numero di sinistri in un singolo giorno ha distribuzione di Poisson di parametro $\frac{1}{25}$. Quindi il numero di sinistri in cinque giorni segue una distribuzione di Poisson di parametro $\frac{1}{5}$ e la probabilità che non si verificheranno sinistri nei prossimi 5 giorni è $e^{-0.2}$.

3. $\mathbf{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \mathbf{E}(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$
 $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{5}{4} - \frac{9}{16} = \frac{11}{16}$

4. $\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(Y | X = k) \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2} p (1-p)^{k-1} = \frac{1}{2p}$

5. $Z = X + Y$ è di Poisson di parametro 70.

Il numero di uomini U che superano l'esame è Poisson di parametro $\frac{1}{2} \cdot 40 = 20$. Il numero di donne D che superano l'esame è Poisson di parametro $\frac{2}{3} \cdot 30 = 20$

a) $\mathbf{P}(\text{almeno 5 studenti sostengono l'esame}) = \mathbf{P}(Z \geq 5) = e^{-70} \sum_{k=5}^{\infty} \frac{(70)^k}{k!} =$
 $1 - e^{-70} \sum_{k=0}^4 \frac{(70)^k}{k!}$

b) $\mathbf{P}(\text{superano l'esame esattamente 15 donne}) = \mathbf{P}(D = 15) = e^{-20} \frac{(20)^{15}}{15!}$

c) $\mathbf{E}(\text{studenti che superano l'esame}) = \mathbf{E}(U + D) = 40$

d)

$$\mathbf{E}(\text{studenti che superano l'esame} | X = 20) =$$

$$\mathbf{E}(U + D | X = 20) = \mathbf{E}(U | X = 20) + \mathbf{E}(D) = 20 \cdot \frac{1}{2} + 20 = 30$$