Calcolo delle Probabilità - problemi d'esame

M. Isopi

Esercizio 1.

Un'urna contiene cinque palle rosse e quattro bianche. Estraiamo una palla a caso e poi la reinseriamo insieme a un'altra dello stesso colore. Successivamente effettuiamo un'altra estrazione.

- a) Calcolare la probabilità che la prima palla sia stata bianca, sapendo che la seconda è stata rossa.
- b) Effettuiamo k estrazioni con le stesse regole. Calcolare la probabilità dell'evento $\{le\ k\ palle\ estratte\ sono\ tutte\ rosse\}$.
- c) Si Indichi con X il numero di colori diversi che abbiamo osservato nelle prime due estrazioni. Calcolare $\mathbf{E}(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Esercizio 2. Un dado a 12 facce viene lanciato dieci volte. Sia X il punteggio massimo ottenuto nei dieci lanci.

- a) Calcolare $\mathbf{P}(X \leq 3)$
- b) Calcolare $\mathbf{P}(X = 3)$
- c) Sia Y il punteggio massimo ottenuto nei primi nove lanci. Calcolare $\mathbf{P}(X = k | Y = 6)$.

Sia A l'evento $\{tutti\ i\ dieci\ lanci\ danno\ lo\ stesso\ risultato\}$.

- d) Dire se gli eventi A e $\{X \leq 3\}$ sono positivamente dipendenti, negativamente indipendenti o indipendenti.

Esercizio 3.

La variabile aleatoria X può assumere i valori $-2, -1, 0, 1, 2$ ciascuno con probabilità $\frac{1}{5}$. Sia $Y = X^2$.

- a) Calcolare $\mathbf{P}(X = h | Y = k)$ per i valori rilevanti di h e k .
- b) Calcolare $\mathbf{E}(X|Y)$
- c) Calcolare $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
- d) X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.

Esercizio 4.

Ogni giorno un venditore online di computer riceve un numero X di ordini. X è una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 2$.

- a) Qual è la probabilità che arrivino almeno due ordini?
- b) Qual è la probabilità che siano arrivati almeno due ordini, sapendo che ne è arrivato almeno uno?
- c) Trovare il valore atteso del numero di ordini arrivati, sapendo che ne è giunto almeno uno.

Con probabilità $p = 1/3$ l'ordine proviene da un'azienda.

- d) In un dato giorno con quale probabilità gli ordini sono solo da privati?

Esercizio 5.

Una borsa di studio viene attribuita nel modo seguente. Ogni membro di una commissione di tre persone mette in ordine i candidati secondo la sua valutazione. La borsa viene attribuita al candidato (se esiste) che risulta primo in almeno due liste. Al concorso per la borsa partecipano tre studenti, Aldo, Beatrice e Carlo. La commissione è formata da tre professori totalmente incompetenti che decidono a caso (ognuno indipendentemente) l'ordine dei tre.

- a) Calcolare la probabilità che Aldo riceva la borsa.
- b) Calcolare la probabilità che la borsa venga attribuita.

Successivamente gli stessi tre studenti partecipano al concorso per un'altra borsa. Questa volta i tre professori che compongono la commissione, oltre che incompetenti sono pigri. Quindi ognuno dei tre (indipendentemente dagli altri) sceglie a caso uno dei tre colleghi in commissione per il precedente concorso e copia la classifica da lui stilata.

- c) Calcolare la probabilità che Aldo riceva la seconda borsa, sapendo che ha ricevuto la prima.
- d) Calcolare la probabilità che la borsa venga attribuita in entrambi i concorsi, ma a persone diverse.