Calcolo delle Probabilità a.a. 2016-2017
soluzioni della prova scritta del 6-2-2017

M. Isopi

Soluzione esercizio 1.

Consideriamo gli eventi:
A ={le prime 5 palle estratte sono tutte bianche}
B ={fra le le prime 5 palle estratte vi sono sia la rossa che la blu}
C ={fra le le prime 5 palle estratte vi è la rossa, ma non la blu}
D ={fra le le prime 5 palle estratte vi è la blu, ma non la rossa}

a) Sia S l'insieme di tutti gli ordinamenti delle $k+2$ palline, S_B il sottoinsieme degli ordinamenti in cui la palla blu precede la palla rossa e S_R il sottoinsieme degli ordinamenti in cui la palla rossa precede la blu. $S = S_B \cup S_R$ e $S_B \cap S_R = \emptyset$. Lo scambio di posizione fra la palla rossa e quella blu definisce una bieizione fra S_B e S_R che pertanto hanno la stessa cardinalità.

Quindi $\mathbf{P}(B_R) = \dfrac{\mathbf{P}(B_R)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{1}{2}$.

b) $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\binom{k}{5}\binom{2}{0}}{\binom{k+2}{5}} = \dfrac{(k-3)(k-4)}{(k+2)(k+1)}$

c) $\mathbf{P}(B) = \dfrac{\binom{k}{3}\binom{2}{2}}{\binom{k+2}{5}} = \dfrac{20}{(k+2)(k+1)}$

d) $\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)+\mathbf{P}(D) = 1$; inoltre $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(D)$ (vedi punto **a**).

Quindi: $\mathbf{P}(C) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{(k-3)(k-4)}{(k+2)(k+1)} - \dfrac{20}{(k+2)(k+1)}\right) = \dfrac{5k-15}{(k+2)((k+1)}$

Soluzione esercizio 2.

a) $\mathbf{P}(X_i = k) = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{4}$

b)

$$\mathbf{P}(X_1 \le X_2 | X_1 = k) = \frac{\mathbf{P}(X_1 \le X_2 \cap X_1 = k)}{P(X_1 = k)} = \frac{\mathbf{P}(k \le X_2 \cap X_1 = k)}{\mathbf{P}(X_1 = k)}$$
$$= \mathbf{P}(k \le X_2) = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

c)

$$\mathbf{P}(X_1 \le X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 \le X_2 | X_1 = k)\mathbf{P}(X_1 = k)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^{k} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{4}{5}$$

Per simmetria anche $\mathbf{P}(X_1 \le X_2) = \frac{4}{5}$.

d)

$$1 = \mathbf{P}(X_1 \le X_2 \cup X_2 \le X_1) = \mathbf{P}(X_1 \le X_2) + \mathbf{P}(X_2 \le X_1) - \mathbf{P}(X_2 = X_1).$$

Da cui $\mathbf{P}(X_2 = X_1) = \frac{3}{5}$

Soluzione esercizio 3.

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{5}{8}\right| \ge \frac{\sqrt{5}}{32}\right) \le \frac{\mathbf{V}ar(\frac{S_n}{n})}{(\frac{\sqrt{5}}{32})^2} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8}}{n\frac{5}{1024}} = \frac{48}{n}$$

Quindi il valore più piccolo di n che soddisfa la disuguaglianza si trova prendendo $\frac{48}{n} = \frac{3}{25}$, ovvero $n = 400$.