Calcolo delle Probabilità a.a. 2016-2017
soluzioni prova scritta del 28-9-2017

M. Isopi

Soluzione esercizio 1.

a)

$$\mathbf{P}(1^o\text{saggio}, 2^o\text{romanzo}) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$$

b) Ci sono in totale 12 libri e questi posso essere ordinati in 12! modi distinti. Ci sono 5! ordinamenti per i libri di illustrazione, 3! per i romanzi e 4! per i saggi. Inoltre abbiamo 3! modi di ordinare i tre generi.

$$\mathbf{P}(\text{libri di ogni genere contigui}) = 3! \cdot \frac{5!\,3!\,4!}{12!}$$

c) Uno solo dei 5! ordinamenti dei libri di illustrazione rispetta l'ordine alfabetico. Analogamente per i libri di analisi e geometria.

$$\mathbf{P}(\text{libri di ogni materia in ordine alfabetico}) = \frac{1}{5!\,3!\,4!}$$

d) Una volta fissato uno dei 3! ordinamenti possibili per le 3 materie, esiste un solo ordinamento possibile dei 16 libri.

$$\mathbf{P}(\text{libri di ogni genere in ordine alfabetico e contigui.}) = \frac{3!}{12!}$$

Osserviamo inoltre che l'evento qui descritto è l'intersezione degli eventi descritti ai punti b) e c) e la sua probabilità il prodotto delle probabilità di tali eventi, che risultano pertanto indipendenti.

Soluzione esercizio 2.

a) Si vede subito che Y può assumere solo i valori 0,1.

$$\mathbf{P}(X=0|Y=0)=\begin{cases} 1 & \text{se } \ h=0 \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$\mathbf{P}(X=h|Y=1)=\begin{cases} 1/2 & \text{se } \ h=\pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

b)

$$\mathbf{E}(X|Y)=\sum_h h\mathbf{P}(X=h|Y=k)=0\ \forall k$$

pertanto $\mathbf{E}(X|Y)=0$

c) Si ricordi che $Y=|X|$, e si osservi che $\mathbf{E}(X)=0$. Pertanto

$$\mathbf{C}ov(X,Y)=\mathbf{E}(XY)-\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)=\mathbf{E}(X|X|)-0=0-0=0$$

poiché anche $X|X|$ ha distribuzione dispari come X e la sua attesa è quindi nulla.

d) X e Y non sono indipendenti. Per esempio consideriamo:

$$\mathbf{P}(X=0\cap Y=1)=0\neq\mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=1)=\frac{2}{9}\ .$$

Soluzione esercizio 3.

a) $\mathbf{P}(X_i = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3}$

b)

$$\mathbf{P}(X_1 \leq X_2 | X_1 = k) = \frac{\mathbf{P}(X_1 \leq X_2 \cap X_1 = k)}{P(X_1 = k)} = \frac{\mathbf{P}(k \leq X_2 \cap X_1 = k)}{\mathbf{P}(X_1 = k)}$$
$$= \mathbf{P}(k \leq X_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

c)

$$\mathbf{P}(X_1 \leq X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 \leq X_2 | X_1 = k)\mathbf{P}(X_1 = k)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^{k-1} \cdot (\frac{1}{3})^{k-1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

Per simmetria anche $\mathbf{P}(X_1 \leq X_2) = \frac{3}{4}$.

d)

$$1 = \mathbf{P}(X_1 \leq X_2 \cup X_2 \leq X_1) = \mathbf{P}(X_1 \leq X_2) + \mathbf{P}(X_2 \leq X_1) - \mathbf{P}(X_2 = X_1)$$

Da cui $\mathbf{P}(X_2 = X_1) = \frac{1}{2}$