

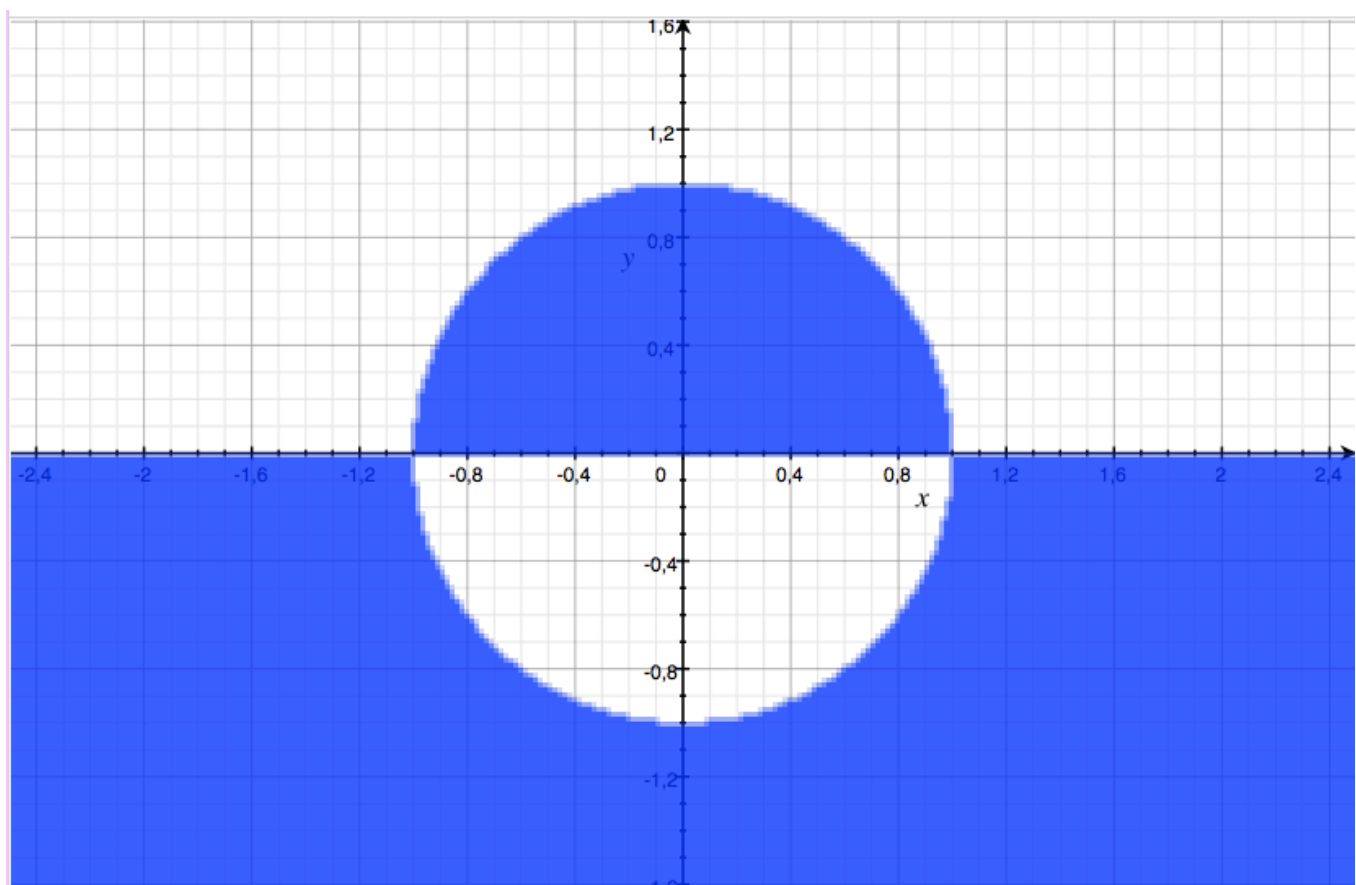
Prova in itinere di Elementi di Matematica - Soluzioni
dicembre 2014

M. Isopi

Esercizio 1. Determinare il campo di esistenza della seguente funzione e disegnarlo.

$$f(x, y) = \sqrt{y(1 - y^2 - x^2)}$$

Deve essere $y(1 - y^2 - x^2) \geq 0$. Quindi la funzione risulta definita se $y \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq 1$, oppure se $y \leq 0$ e $x^2 + y^2 \geq 1$ (la zona colorata del disegno).



Esercizio 2. Trovare i punti di stazionarietà della seguente funzione e classificarli se possibile.

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + xy$$

Soluzione.

$$\begin{aligned}f_x &= 3x^2 + y \\f_y &= -3y^2 + x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x^2 + y &= 0 \\-3y^2 + x &= 0\end{aligned}$$

$$x = 0, y = 0; \quad x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}f_{xx} &= 6x \\f_{yy} &= -6y \\f_{xy} &= f_{yx} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{xx}(0, 0) &= 0; \\f_{xx}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) &= 2; \quad (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 3 \\ \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) &\text{ è quindi un punto di minimo}\end{aligned}$$

Esercizio 3.

$$\int \frac{\sqrt{x} - 4x}{x} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \int 4 dx = 2\sqrt{x} - 4x + \text{cost.}$$

Esercizio 4.

$$\int \sqrt[4]{x+3} dx = \frac{4}{5} \sqrt[4]{(x+3)^5}$$

Esercizio 5.

$$\int_1^{\log 3} e^{2x+1} dx = e \int_1^{\log 3} e^{2x} dx = e \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_1^{\log 3} = \frac{e}{2} (9 - e^2)$$

Esercizio 6. L'area della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = |x - 1|$ e l'asse delle ascisse, nell'intervallo $[-3, 3]$ vale

$$\int_{-3}^3 |x - 1| dx = \int_{-3}^1 (1 - x) dx + \int_1^3 (x - 1) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{-3}^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = 10$$