Corso di Laurea in Diritto e Amministrazione Pubblica

Prova in itinere di Elementi di Matematica
14 Novembre 2014: soluzioni

M. Isopi

Esercizio 1.
Trovare un numero positivo che sommato al suo quadrato dia 20. Tale numero è unico?

Soluzione
Detto x tale numero, il problema si traduce nell'equazione

$$x^2 + x = 20$$

che ha le soluzioni $x = 4$ e $x = -5$. Pertanto il numero cercato è 4 (soluzione unica).

Esercizio 2. Calcolare la funzione inversa di $f(x) = \frac{x+3}{x}$.

Soluzione

$$y = \frac{x+3}{x}; \quad xy = x + 3; \quad (y-1)x = 3; \quad x = \frac{3}{y-1}$$

pertanto

$$f^{-1}(x) = \frac{3}{x-1}$$

Esercizio 3. Risolvere la disequazione $x^2 - 5|x| + 6 > 0$

Soluzione
Quando $x \geq 0$ abbiamo $x^2 - 5x + 6 > 0$, mentre per $x < 0$ abbiamo $x^2 + 5x + 6 > 0$.

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 5x + 6 > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Le radici di $x^2 - 5x + 6 > 0$ sono 2 e 3, mentre quelle di $x^2 + 5x + 6 > 0$ sono -2 e -3.
pertanto il primo sistema ha soluzione $0 \leq x < 2$ e $x > 3$. il secondo invece ha soluzione $x < -3$ e $-2 < x < 0$.
In conclusione la disequazione ha soluzione $x < -3, \quad -2 < x < 2$ e $x > 3$.

Esercizio 4.
Studiare la seguente funzione (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, intervalli di crescenza e decrescenza, massimi e minimi):

$$f(x) = (\sqrt{x-1})e^{-x}$$

Tracciarne quindi approssimativamente il grafico, coerentemente con i dati trovati.

Soluzione

La funzione è definita per $x \geq 1$ e$f(1) = 0$. Inoltre $f(x) > 0$ per $x > 1$. Quindi 1 è un punto di minimo. Abbiamo poi

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

e

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\, e^{-x} - \sqrt{x-1}\, e^{-x} = (\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1})e^{-x}$$

la disequazione $f'(x) \geq 0$ diventa

$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \geq \sqrt{x-1}$$

che ha soluzione $x \leq \frac{3}{2}$.

Pertanto al funzione cresce fra 1 e $\frac{3}{2}$, ove ha un massimo e poi decresce.