Corso di Laurea in Diritto e Amministrazione Pubblica

Elementi di Matematica
Soluzioni prova scritta del 4 febbraio 2015

M. Isopi

Soluzione esercizio 1.

La funzione è definita per $x \leq 2$ e $f(2) = 0$. Inoltre $f(x) > 0$ per $x < 2$. Quindi 1 è un punto di minimo. Abbiamo poi

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Calcoliamo la derivata e studiamone il segno:

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\, e^x + \sqrt{2-x}\, e^x = (\sqrt{2-x} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}})e^x$$

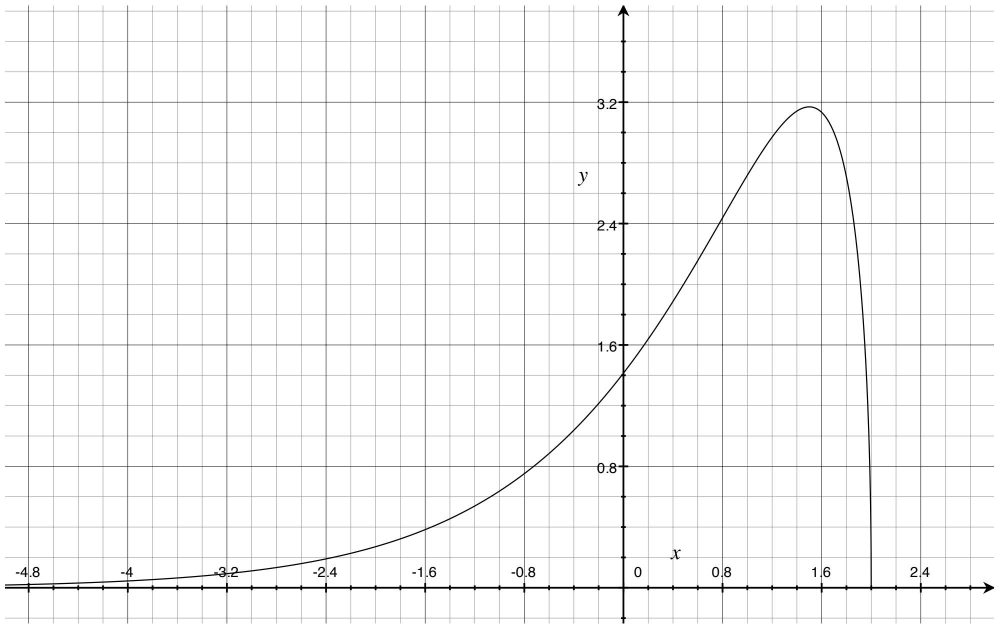
la disequazione $f'(x) \geq 0$ diventa

$$\frac{1}{2\sqrt{2-x}} \leq \sqrt{2-x}$$

che ha soluzione $x \geq \frac{3}{2}$.

Pertanto al funzione cresce da $-\infty$ a $\frac{3}{2}$, ove ha un massimo e poi decresce.

Nel punto di massimo la funzione vale $\dfrac{e^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$.



Soluzione Esercizio 2.

Calcoliamo le derivate parziali e poi eguagliamo il gradiente a zero.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 \\ f_y = 6xy - 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Troviamo le soluzioni A:$(1,2)$, B:$(-1,-2)$, C:$(2,1)$, D:$(-2,-1)$.

Le derivate seconde sono

$$\begin{cases} f_{xx} = 6x \\ f_{yy} = 6x \\ f_{xy} = f_{yx} = 6y \end{cases}$$

inoltre: $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36(x^2 - y^2)$.

Nei punti di stazionarietà: $f_{xx} > 0$ in A e C; $f_{xx} < 0$ in B e D.
$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}) < 0$ in A e B; $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}) > 0$ in C e D.
Quindi abbiamo un minimo in C e un massimo in D, mentre A e B non sono punti né di minimo, né di massimo (sono punti di sella).

Soluzione esercizio 3.

$$\int \sqrt{2x-5}\, dx = \int (2x-5)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{3}(2x-5)^{\frac{3}{2}}$$

Soluzione esercizio 4

$$\text{area} = \int_0^4 |1 - x^2|\, dx = \int_0^1 (1 - x^2)\, dx + \int_1^4 (x^2 - 1)\, dx = \frac{56}{3}$$