Corso di Laurea in Diritto e Amministrazione Pubblica

Elementi di Matematica
Soluzioni prova scritta del 12 dicembre 2015

M. Isopi

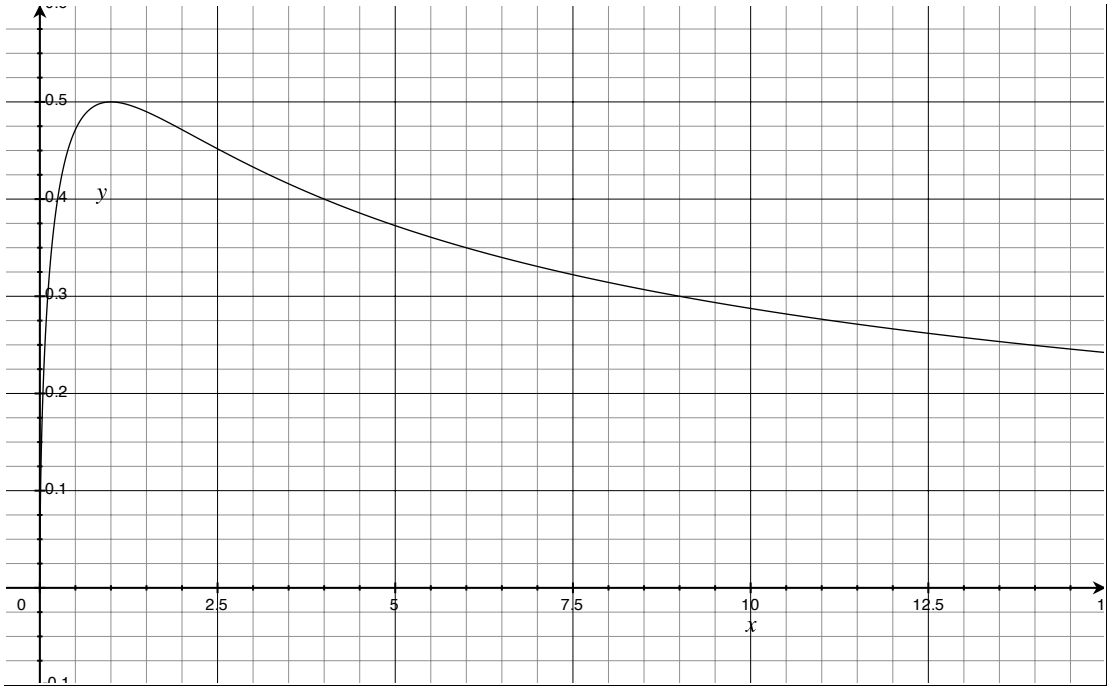
Soluzione esercizio 1.
La funzione è definita per $x \geq 0$. Abbiamo $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ per $x > 0$. Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x+1) - x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^2} = \frac{x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{2(x+1)^2}$$

La disequazione $f'(x) \geq 0$ è equivalente a

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x}$$

che ha come soluzione $x \leq 1$. Ricordando che deve essere $x \geq 0$, otteniamo che la funzione cresce fra 0 e 1, ove ha un massimo, e poi decresce.



Soluzione esercizio 2.

Calcoliamo le derivate parziali ed eguagliamo il gradiente a zero.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + y \\ f_y = -3y^2 + x \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ -3y^2 + x = 0 \end{cases}$$

Troviamo le soluzioni $(x = 0, y = 0)$ e $(x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3})$

Le derivate seconde sono

$$\begin{cases} f_{xx} = 6x \\ f_{yy} = -6y \\ f_{xy} = f_{yx} = 1 \end{cases}$$

Troviamone il valore nei punti di stazionarietà:
$f_{xx}(0,0) = 0$ e quindi su $(0,0)$ non possiamo dire nulla.
$f_{xx}(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = 2$ e $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy})(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = 3$, quindi $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ è un punto di minimo.

Soluzione esercizio 3.

$$\int_0^{3e} \frac{1}{x+e}\, dx = \log(x+e)\Big|_0^{3e} = (\log 4e - \log e) = \log 4\,.$$

Soluzione esercizio 4

$$\int \frac{\sqrt{x} + 4x}{x}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int 4\, dx = 2\sqrt{x} + 4x + c\,.$$