§ 6. *Integrale di Stieltjes*

1. Misure di Stieltjes. Nel § 1 del capitolo precedente, parlando della costruzione della misura di Lebesgue sulla retta, abbiamo già menzionato la seguente struttura. Su un intervallo chiuso $[a, b]$ sia data una funzione monotona non decrescente F che, per fissare le idee, supporremo continua a sinistra. Dopo aver definito le misure di tutti gli intervalli chiusi, aperti e semichiusi appartenenti all'intervallo principale $[a, b]$ mediante le uguaglianze

$$\begin{cases} m(\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha + 0), \\ m[\alpha, \beta] = F(\beta + 0) - F(\alpha), \\ m(\alpha, \beta] = F(\beta + 0) - F(\alpha + 0), \\ m[\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \end{cases} \tag{1}$$

possiamo estendere questa misura mediante il prolungamento di Lebesgue della misura a una certa σ-algebra $\mathfrak{a}_F$ contenente tutti i sottoinsiemi aperti e tutti quelli chiusi (e, quindi, tutti i sottoinsiemi di Borel) dell'intervallo $[a, b]$. La misura μ_F così costruita si chiama *misura di Lebesgue-Stieltjes* corrispondente alla funzione F, e la funzione stessa F è detta *funzione generatrice* di questa misura [1].

Consideriamo alcuni casi particolari della misura di Lebesgue-Stieltjes.

1. Sia F una funzione di salto, $x_1, x_2, \ldots$ ne siano i punti di discontinuità e $h_1, h_2, \ldots$ i valori dei suoi salti in questi

[1] Se la funzione monotona non decrescente F è non continua a sinistra, allora anch'essa permette di definire la misura portando nelle formule (1) le variazioni evidenti; ad esempio, si deve porre $m[\alpha, \beta] = F(\beta + 0) - F(\alpha - 0)$ e via di seguito.

punti. Allora la misura μ_F corrispondente a questa funzione è costruita come segue: tutti i sottoinsiemi dell'intervallo $[a, b]$ sono misurabili e la misura dell'insieme A vale

$$\mu_F(A) = \sum_{x_i \in A} h_i. \tag{2}$$

Infatti, dalla definizione della misura di Lebesgue-Stieltjes si vede immediatamente che la misura di ogni punto x_i è uguale a h_i, e la misura del complemento dell'insieme $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ è nulla. Da qui deriva l'uguaglianza (2) per ogni $A \subset [a, b]$ in virtù della σ-additività della misura μ_F. La misura μ_F costruita in base a una funzione di salto si chiama misura *discreta*.

2. Sia F una funzione non decrescente assolutamente continua su $[a, b]$ e $f = F'$ la sua derivata. Allora la misura corrispondente μ_F è definita a priori su tutti i sottoinsiemi di $[a, b]$ misurabili secondo Lebesgue, e per ogni A si ha

$$\mu_F(A) = \int_A f(x)\, dx. \tag{3}$$

Infatti, in virtù del teorema di Lebesgue, per ogni intervallo semiaperto $[\alpha, \beta)$ abbiamo

$$\mu_F[\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx.$$

Poiché il prolungamento di Lebesgue di ogni misura σ-additiva è definito univocamente dai suoi valori sul semianello iniziale, ne segue l'uguaglianza (3) per tutti gli $A \subset [a, b]$ misurabili secondo Lebesgue. La misura μ_F, corrispondente a una funzione assolutamente continua F, si chiama misura *assolutamente continua*.

3. Se F è una funzione continua singolare, la misura μ_F che le corrisponde è concentrata interamente sull'insieme di misura di Lebesgue nulla sul quale F' è diversa da zero o non esiste. La misura stessa μ_F è detta misura *singolare*.

È chiaro che se $F = F_1 + F_2$, allora $\mu_F = \mu_{F_1} + \mu_{F_2}$; la decomponibilità di una funzione monotona come somma di funzioni di salto, assolutamente continua e singolare implica *la possibilità di rappresentare ogni misura di Lebesgue-Stieltjes sotto forma di somma di componenti discreta, assolutamente continua e singolare*. La decomposizione di una funzione monotona in tre componenti è definita a meno di termini costanti. Pertanto la decomposizione di ogni misura di Lebesgue-Stieltjes in componenti discreta, assolutamente continua e singolare è *univoca*.

Quanto detto si riferisce alle misure di Lebesgue-Stieltjes sulla *semiretta*. Supponendo ora che F sia una funzione monotona non decrescente, limitata (superiormente e inferiormente) su tutta la retta, definiamo la misura di ogni intervallo chiuso, aperto e semichiuso sulla retta mediante formule analoghe alle (1); otteniamo così una misura finita su tutta la retta, detta anch'essa *misura di Lebesgue-Stieltjes.* In particolare, in questo caso la misura di tutta la retta sarà uguale a

$$F(\infty) - F(-\infty),$$

dove

$$F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x), \quad F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

(l'esistenza dei limiti deriva dalla monotonia e dalla limitatezza di F).

Il concetto di misura di Lebesgue-Stieltjes esaurisce effettivamente tutte le misure (cioè tutte le funzioni di insiemi σ-additive, non negative, finite) sulla retta. Infatti sia μ una di queste misure. Ponendo

$$F(x) = \mu(-\infty, x),$$

otteniamo una funzione monotona tale che la misura di Lebesgue-Stieltjes che le corrisponde coincida con la misura iniziale μ. In tal modo il termine « misure di Lebesgue-Stieltjes » non definisce in realtà nessuna classe speciale di misure sulla retta, bensì indica soltanto un procedimento di costruzione di queste misure in base a una funzione generatrice data.

2. Integrale di Lebesgue-Stieltjes. Sia μ_F una misura su $[a, b]$ generata da una funzione monotona F. Per questa misura si definisce in modo ordinario la classe delle funzioni sommabili e si introduce la nozione di integrale di Lebesgue

$$\int_a^b f(x)\, d\mu_F.$$

Questo integrale, calcolato rispetto alla misura μ_F corrispondente alla funzione F, si chiama *integrale di Lebesgue-Stieltjes* e si denota con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\, dF(x).$$

Consideriamo alcuni casi particolari.

1. Se F è una funzione di salto (cioè se μ_F è una misura discreta), l'integrale $\int_a^b f(x)\, dF(x)$ si riduce, evidentemente, alla somma $\sum_i f(x_i)\, h_i$, dove x_i sono i punti di discontinuità della funzione F e h_i i salti di F nei punti x_i.

2. Se F è una funzione assolutamente continua, allora l'integrale di Lebesgue-Stieltjes $\int_a^b f(x)\,dF(x)$ è uguale a $\int_a^b f(x)\,F'(x)\,dx$, cioè all'integrale di $f(x)\,F'(x)$ calcolato in base alla misura di Lebesgue ordinaria. Infatti, se $f(x) =$ costante su un insieme misurabile $A \subset [a, b]$ e $f(x) = 0$ fuori di A, allora l'uguaglianza

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f(x)\,F'(x)\,dx \tag{4}$$

deriva dalla relazione (3). In virtù della σ-additività degli integrali, l'uguaglianza (4) si estende ugualmente alle funzioni semplici sommabili in base alla misura μ_F. Ora $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni semplici, convergente uniformemente a f. Si può supporre in questo caso che la successione $\{f_n\}$ sia non decrescente. Allora $\{f_n(x)\,F'(x)\}$ è una successione non decrescente, convergente quasi ovunque a $f(x)\,F'(x)$; quindi, in virtù del teorema di B. Levi, si può passare al limite nell'uguaglianza

$$\int_a^b f_n(x)\,dF(x) = \int_a^b f_n(x)\,F'(x)\,dx$$

per $n \to \infty$.

Da quanto detto risulta con chiarezza che se F è la somma di una funzione di salto e di una assolutamente continua, allora l'integrale di Lebesgue-Stieltjes rispetto alla misura μ_F si riduce a una serie (o a una somma finita) e all'integrale rispetto alla misura di Lebesgue ordinaria. Se invece F contiene anche la componente *singolare*, questa riduzione *è impossibile*.

Si può estendere in modo naturale la nozione di integrale di Lebesgue-Stieltjes passando dalle funzioni monotone a funzioni arbitrarie a variazione limitata. Sia Φ una funzione di questo tipo. Rappresentiamola sotto forma di differenza di due funzioni monotone:

$$\Phi = v - g,$$

dove v è la variazione totale della funzione Φ sull'intervallo $[a, x]$. Introduciamo ora l'integrale di Lebesgue-Stieltjes di Φ ponendo, in accordo con la definizione,

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,dv(x) - \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

È facile provare che se Φ è rappresentabile in un altro modo come differenza di due funzioni monotone, per esempio

$$\Phi = w - h,$$

allora

$$\int_a^b f(x)\,dv(x) - \int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dw(x) - \int_a^b f(x)\,dh(x),$$

vale a dire, per il calcolo dell'integrale di Lebesgue-Stieltjes di una data funzione Φ si può utilizzare qualsiasi rappresentazione di questa funzione come differenza di due funzioni monotone.

3. Alcune applicazioni dell'integrale di Lebesgue-Stieltjes alla teoria delle probabilità. L'integrale di Lebesgue-Stieltjes trova uso sia in analisi che in numerose questioni applicative. In particolare, questa nozione si usa largamente nella teoria delle probabilità. Ricordiamo che si chiama *funzione di distribuzione* di una variabile aleatoria ξ la funzione F definita per ogni x dall'uguaglianza

$$F(x) = P(\xi < x),$$

cioè $F(x)$ è la probabilità che la variabile aleatoria ξ assuma un valore minore di x. È evidente che ogni funzione di distribuzione è monotona non decrescente, continua a sinistra e soddisfacente alle condizioni

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1.$$

Inversamente, ogni tale funzione può essere considerata come funzione di distribuzione di una variabile aleatoria.

Le caratteristiche essenziali di una variabile aleatoria sono la sua speranza matematica

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x) \tag{5}$$

e la varianza

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2\,dF(x). \tag{6}$$

Di solito le variabili aleatorie si distinguono in discrete e continue. Una variabile aleatoria si dice *discreta* se può assumere soltanto un numero finito o numerabile di valori

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

(il numero di chiamate in una centrale telefonica in un intervallo di tempo è una variabile aleatoria discreta, per esempio).

Se $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ sono le probabilità che la variabile ξ assuma i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$ allora come funzione di distribuzione di ξ serve, evidentemente, una funzione di salto.

Per questa funzione gli integrali (5) e (6) si riducono rispettivamente alle somme

$$M\xi = \sum_i x_i p_i$$

e

$$D\xi = \sum_i (x_i - a)^2 p_i \qquad (a = M\xi).$$

Una variabile aleatoria ξ si dice *continua* se la sua funzione di distribuzione F è assolutamente continua. La derivata F' di questa funzione di distribuzione è detta *densità di distribuzione delle probabilità* della variabile aleatoria ξ. In accordo con quanto detto nel n. 2, gli integrali di Stieltjes, per una variabile aleatoria, che ne esprimono la speranza matematica e la varianza, si riducono agli integrali rispetto alla misura ordinaria di Lebesgue

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\, dx, \qquad D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 p(x)\, dx,$$

dove $p = F'$ è la densità di distribuzione delle probabilità per ξ e $a = M\xi$.

I corsi elementari di teoria delle probabilità si limitano, di solito, allo studio delle variabili aleatorie discrete o a quelle continue che si incontrano soprattutto in questioni applicative. In generale, però, la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria può contenere anche una componente singolare, cosicché non ogni variabile aleatoria si può rappresentare come combinazione di una componente discreta e una continua.

Sia ξ una variabile aleatoria, F la sua funzione di distribuzione e $\eta = \varphi(\xi)$ un'altra variabile aleatoria rappresentante una funzione boreliana di ξ. La speranza matematica M della variabile η si può scrivere, per definizione, nella forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, d\Phi(x),$$

dove Φ è la funzione di distribuzione di η. È essenziale, tuttavia, che quando φ è sommabile rispetto alla misura generata sulla retta dalla funzione F, allora la speranza matematica della variabile η si possa scrivere anche mediante la funzione di distribuzione F della variabile ξ, e precisamente:

$$M\eta = M\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dF(x).$$

Infatti, la funzione $y = \varphi(x)$ definisce un'applicazione della retta $(-\infty < x < \infty)$ con la misura μ_F (generata da F) assegnata su di essa nella retta $(-\infty < y < \infty)$ con la misura μ_Φ in cui la μ_F si trasforma dall'applicazione $y = \varphi(x)$. Ma dai risultati ottenuti nel capitolo V segue che se (X, μ)

e (Y, ν) sono due spazi muniti di misura, φ un'applicazione che conserva la misura (cioè tale che $\nu(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$) e trasforma (X, μ) in (Y, ν) e f una funzione sommabile in (Y, ν), allora

$$\int_Y f(y)\, d\nu = \int_X f(\varphi(x))\, d\mu$$

(cambiamento di variabili nell'integrale di Lebesgue). Ponendo $f(y) = y$ e $\mu = \mu_F$, $\nu = \mu$, otteniamo l'uguaglianza richiesta. Quindi per calcolare la speranza matematica (e, ovviamente, la varianza) *della funzione* di una variabile ξ, è sufficiente conoscere soltanto la funzione di distribuzione della variabile stessa ξ.

4. Integrale di Riemann-Stieltjes. Accanto all'integrale di Lebesgue-Stieltjes, considerato sopra e rappresentante di fatto la differenza fra due integrali di Lebesgue di una data funzione f rispetto a due misure date sulla retta, si può definire un altro integrale, detto di Riemann-Stieltjes. Esso si introduce come limite di somme integrali, analoghe alle somme integrali ordinarie di Riemann.

Supponiamo di nuovo che Φ sia una funzione continua a sinistra, a variazione limitata, data su un intervallo semichiuso $[a, b)$ e f una funzione qualsiasi sullo stesso intervallo. Consideriamo una suddivisione [1]

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

dell'intervallo semichiuso $[a, b)$ in elementi $[x_{i-1}, x_i)$ e, fissando in ciascuno di questi elementi un punto arbitrario ξ_i, costruiamo la somma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})] \tag{7}$$

(con $\Phi(x_n)$ è inteso $\Phi(b - 0)$). Se per $\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$ queste somme tendono a un limite (che non dipende né dal modo in cui è diviso l'intervallo semichiuso $[a, b)$, né da come sono fissati i valori ξ_i in ciascuno degli elementi della suddivisione), questo limite è detto *integrale di Riemann-Stieltjes* della funzione f rispetto alla funzione Φ su $[a, b)$ e si denota con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x). \tag{8}$$

Teorema 1. *Se la funzione f è continua sull'intervallo chiuso* $[a, b]$, *il suo integrale di Riemann-Stieltjes* (8) *esiste e coincide con il corrispondente integrale di Lebesgue-Stieltjes.*

---

[1] Poiché il contributo di singoli punti nell'integrale di Stieltjes può essere diverso da zero, gli elementi della suddivisione non devono avere punti comuni. Questa è la ragione per cui consideriamo qui un intervallo semichiuso.

Dimostrazione. Si può considerare la somma (7) come integrale di Lebesgue-Stieltjes di una funzione a gradini

$$f_n(x) = f(\xi_i) \quad \text{per} \quad x_{i-1} \leqslant x < x_i.$$

Quando l'intervallo semiaperto $[a, b)$ è diviso in elementi più piccoli, la successione di queste funzioni è convergente uniformemente a f. Pertanto il limite di queste somme esiste e rappresenta l'integrale di Lebesgue-Stieltjes della funzione limite f (teorema sul passaggio al limite sotto il segno di integrale). Al tempo stesso, questo è proprio il limite che abbiamo chiamato integrale di Riemann-Stieltjes (8).

Stabiliamo alcune proprietà elementari dell'integrale di Riemann-Stieltjes.

1. *Vale la stima* (teorema della media)

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\Phi(x) \right| \leqslant \max |f(x)|\, V_a^b[\Phi], \tag{9}$$

dove $V_a^b[\Phi]$ è la variazione totale della funzione Φ su $[a, b]$.

Infatti, qualunque sia la suddivisione dell'intervallo semichiuso $[a, b)$, si verifica la disuguaglianza

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)| \cdot |\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \max |f(x)| \cdot \sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})| \leqslant \max |f(x)|\, V_a^b[\Phi].$$

Passando al limite in questa disuguaglianza otteniamo la stima (9). Per $\Phi(x) = x$, essa si trasforma nella nota stima

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant (b-a) \max |f(x)|$$

per l'integrale di Riemann.

2. *Se* $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, *allora*

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\, d\Phi_1(x) + \int_a^b f(x)\, d\Phi_2(x).$$

Infatti, qualunque sia la suddivisione dell'intervallo semichiuso $[a, b)$, un'uguaglianza corrispondente si verifica per le somme integrali e, di conseguenza, si conserva anche al limite, cioè per gli integrali.

Osservazione 1. Abbiamo definito l'integrale di Riemann-Stieltjes (8) supponendo la funzione $\Phi(x)$ continua a sinistra. Tuttavia la definizione di questo integrale come limite delle somme (7) resta valida per ogni funzione $\Phi(x)$ a variazione limitata.

Osservazione 2. Quanto detto sull'integrale di Riemann-Stieltjes esteso a un intervallo semichiuso finito è valido nel caso in cui l'integrale si calcoli su tutta la retta o sulla semiretta.

Abbiamo definito l'integrale di Stieltjes su un intervallo semichiuso $[a, b)$. Analogamente, questo integrale si può definire su $(a, b]$, nonché su $[a, b]$ e (a, b). Nel caso dell'integrale di Stieltjes, a differenza di un integrale riemanniano ordinario, i valori dell'integrale sugli intervalli aperto (a, b), chiuso $[a, b]$, semiaperto $(a, b]$ e semichiuso $[a, b)$, in generale, non coincidono. Ad esempio, se a è un punto di discontinuità della funzione Φ, l'integrale su $[a, b]$ è uguale all'integrale su $(a, b]$ più un termine della forma $f(a)\,h$, dove $h = \Phi(a + 0) - \Phi(a)$.

Le suindicate proprietà 1 e 2 sono verificate per ogni funzione f per la quale le espressioni che figurano nelle loro formulazioni hanno senso. Se supponiamo che $f(x)$ sia *continua* sull'intervallo $[a, b]$, allora l'integrale corrispondente gode ancora delle proprietà sostanziali seguenti (in questo caso l'integrale può essere inteso come integrale esteso all'intervallo $[a, b]$ o a uno qualsiasi degli intervalli semiaperti e semichiusi $(a, b]$, $[a, b)$).

3. *Se Φ_1 e Φ_2 sono due funzioni a variazione limitata su $[a, b)$, coincidenti ovunque, tranne in un numero finito o numerabile di punti interni di questo intervallo semichiuso, allora*

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi_1(x) = \int_a^b f(x)\, d\Phi_2(x)$$

per ogni funzione f continua su $[a, b]$.

Per dimostrare ciò, consideriamo dapprima il caso in cui $\Phi_2 \equiv 0$, cioè stabiliamo la validità della seguente proposizione.

3′. *Se ψ è una funzione a variazione limitata e diversa da zero soltanto in un numero finito o numerabile di punti giacenti all'interno di (a, b), allora*

$$\int_a^b f(x)\, d\psi(x) = 0$$

per ogni funzione f continua su $[a, b]$.

Infatti, ciò è evidente per una funzione non nulla in un solo punto x_0 (considerando suddivisioni piccole a piacere dell'intervallo semichiuso $[a, b)$, senza includere x_0 fra i punti di suddivisione, si avranno delle somme integrali uguali a zero); di conseguenza, per l'additività ciò è valido anche per ogni funzione non nulla in un numero finito di punti. Ora la funzione ψ non sia nulla nei punti $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ siano i valori assunti in questi punti. Poiché ψ è a variazione limitata, $\sum_n |y_n| < \infty$. Consideriamo un indice N tale che $\sum_{n>N} |y_n| <$

$< \varepsilon$, e rappresentiamo ψ sotto forma di somma

$$\psi = \psi_N + \tilde{\psi},$$

dove ψ_N assume i valori $y_1, \ldots, y_N$ nei punti $r_1, \ldots, r_N$ ed è nulla in tutti gli altri punti, e $\tilde{\psi}$ è diversa da 0 soltanto nei punti $r_{N+1}, r_{N+2}, \ldots$ In virtù della proprietà 2

$$\int_a^b f(x)\, d\psi(x) = \int_a^b f(x)\, d\psi_N(x) + \int_a^b f(x)\, d\tilde{\psi}(x).$$

Il primo di questi integrali è nullo in accordo con quanto già dimostrato, e il secondo, in virtù della proprietà 1, ammette la stima

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\tilde{\psi}(x) \right| < \max |f(x)|\, 2\varepsilon$$

(poiché, evidentemente, $V_a^b[\tilde{\psi}] = 2 \sum_{n>N} |y_n| < 2\varepsilon$). Essendo ε arbitrario, di qui discende la nostra affermazione.

Ora, per dimostrare la proprietà 3, consideriamo la differenza $\psi = \Phi_1 - \Phi_2$. Essa è diversa da zero soltanto in un numero finito o numerabile di punti appartenenti ad (a, b). Restano da applicare le proprietà 2 e 3'. In particolare, dato che ogni funzione a variazione limitata ha non più di un numero finito di punti di discontinuità, otteniamo la seguente proprietà.

4. *Se la funzione f è continua, allora l'integrale di Riemann-Stieltjes $\int_a^b f(x)\, d\Phi(x)$ è indipendente dai valori che la funzione Φ assume nei suoi punti di discontinuità giacenti all'interno di (a, b).*

Poiché l'integrale di Riemann-Stieltjes di una funzione continua coincide con l'integrale di Lebesgue-Stieltjes corrispondente, allora per l'integrale di Riemann-Stieltjes della funzione continua $f(x)$ sono valide le uguaglianze

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \sum_i f(x_i)\, h_i,$$

se Φ è una funzione di salto, e

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\, \Phi'(x)\, dx, \qquad (10)$$

se Φ è una funzione assolutamente continua. Se, per di più, Φ' è integrabile secondo Riemann, l'integrale a secondo membro dell'uguaglianza (10) può essere inteso nel senso di Riemann.

5. Passaggio al limite sotto il segno di integrale di Stieltjes. Nel capitolo V abbiamo dimostrato alcuni teoremi sul passaggio al limite sotto il segno di integrale di Lebesgue. In quel caso il problema è stato posto nei termini seguenti: dati una successione di funzioni $\{f_n\}$ e i loro integrali rispetto a una misura fissata, si doveva determinare la possibilità di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Quanto all'integrale di Stieltjes, presenta interesse anche un'altra impostazione del problema: $\{\Phi_n\}$ sia una successione data di funzioni a variazione limitata. A quali condizioni è possibile il passaggio al limite sotto il segno di integrale

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x)$$

quando la funzione f è fissata?

Si ha in questo caso il seguente teorema.

Teorema 2 (primo teorema di Helly). *Le funzioni Φ_n, a variazione limitata su $[a, b]$, convergano in ogni punto di questo intervallo a una funzione Φ e, inoltre, le variazioni totali delle funzioni Φ_n siano complessivamente limitate:*

$$V_a^b[\Phi_n] \leqslant C \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Allora la funzione limite Φ è anch'essa a variazione limitata e per ogni funzione continua f si verifica l'uguaglianza

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x) = \int_a^b f(x)\, d\Phi(x). \tag{11}$$

Dimostrazione. Prima di tutto mostriamo che la variazione totale della funzione limite Φ non è superiore alla stessa costante C, la quale limita tutte le $V_a^b[\Phi_n]$. Infatti, qualunque sia la suddivisione dell'intervallo chiuso $[a, b]$ con i punti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$, si ha

$$\sum_{k=1}^{m} |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} |\Phi_n(x_k) - \Phi_n(x_{k-1})| \leqslant C,$$

di conseguenza,

$$V_a^b[\Phi] \leqslant C.$$

Mostriamo ora che la relazione (11) si verifica nel caso in cui f è una funzione a gradini. f assuma i valori h_k sugli intervalli semichiusi $[x_{k-1}, x_k)$. Allora

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x) = \sum_k h_k [\Phi_n(x_k) - \Phi_n(x_{k-1})]$$

e

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \sum_k h_k [\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})].$$

È chiaro che per $n \to \infty$ la prima di queste espressioni si trasforma nella seconda.

Sia ora f una funzione continua e sia ε un numero positivo qualsiasi. Consideriamo una funzione a gradini f_ε tale che

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon/(3C).$$

Allora

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\Phi(x) - \int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x) \right| \leqslant \left| \int_a^b f(x)\, d\Phi(x) - \right.$$

$$\left. - \int_a^b f_\varepsilon(x)\, d\Phi(x) \right| + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x)\, d\Phi(x) - \int_a^b f_\varepsilon(x)\, d\Phi_n(x) \right| +$$

$$+ \left| \int_a^b f_\varepsilon(x)\, d\Phi_n(x) - \int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x) \right|.$$

In virtù del teorema della media per l'integrale di Stieltjes, qui il primo e il terzo termine sono minori di $\varepsilon/3$, e il secondo termine è minore di $\varepsilon/3$ per tutti gli n sufficientemente grandi. Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, ne deriva quanto afferma il teorema.

Osservazione. Questo teorema si estende ugualmente al caso in cui negli integrali

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x)$$

uno o tutti e due i limiti sono infiniti. In questo caso, però, la funzione f deve tendere all'infinito a un certo limite finito (ciò che consente di approssimarla su tutto l'intervallo infinito mediante funzioni a gradino suscettibili di assumere unicamente un numero finito di valori).

Se il primo teorema di Helly stabilisce le condizioni per le quali nell'integrale di Riemann-Stieltjes si può passare al limite rispetto a una successione di funzioni $\{\Phi_n\}$ a variazione limitata, il secondo teorema indica il caso in cui si può garantire l'esistenza stessa della successione soddisfacente alle ipotesi del primo.

Teorema 3 (secondo teorema di Helly). *Da ogni insieme infinito M di funzioni Φ date su un intervallo chiuso $[a, b]$ e soddisfacenti alle condizioni*

$$\max |\Phi(x)| \leqslant C, \quad V_a^b [\Phi] \leqslant K \tag{12}$$

(dove C e K sono due costanti identiche per tutte le $\Phi \in M$), *si può ricavare una sottosuccessione convergente in ogni punto dell'intervallo* $[a, b]$.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare questo teorema per le funzioni monotone. Infatti, sia

$$\Phi = v - g,$$

dove $v(x)$ è la variazione totale della funzione Φ su $[a, x]$. Allora le funzioni v corrispondenti a tutte le $\Phi \in M$ verificano le disuguaglianze

$$\max |v(x)| \leqslant K, \quad V_a^b[v] = V_a^b[\Phi] \leqslant K,$$

cioè soddisfano alle ipotesi del teorema e sono monotone. Supponendo che il teorema sia dimostrato per le funzioni monotone, consideriamo una successione $\{\Phi_n\}$ di M tale che per essa le v_n convergano a un limite v. Inoltre, le funzioni

$$g_n = v_n - \Phi_n$$

sono anch'esse monotone e soddisfano alle ipotesi del teorema. Pertanto dalla $\{\Phi_n\}$ si può ricavare una sottosuccessione $\{\Phi_{n_k}\}$ tale che le g_{n_k} convergano a un limite g. Ma allora

$$\Phi_{n_k}(x) \to \Phi(x) = v(x) - g(x).$$

Dunque, dimostriamo il teorema per una famiglia M di funzioni monotone. Siano $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ tutti i punti razionali dell'intervallo $[a, b]$. In virtù delle condizioni (12) i numeri $\Phi(r_1)$ (dove Φ descrive tutta la famiglia M) formano un insieme limitato e, perciò, esiste una successione $\{\Phi_n^{(1)}\}$ convergente al punto r_1. Inoltre da essa si può ricavare una sottosuccessione $\{\Phi_n^{(2)}\}$ convergente al punto r_2 (e, ovviamente, a r_1). Dalla $\{\Phi_n^{(2)}\}$ ricaviamo una sottosuccessione convergente al punto r_3 e via di seguito. La successione diagonale $\{\Phi_n^{(n)}\}$ sarà convergente, evidentemente, in tutti i punti razionali dell'intervallo $[a, b]$. Il suo limite è una funzione non decrescente Φ definita per il momento soltanto nei punti razionali $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ Completiamo la definizione negli altri punti dell'intervallo $[a, b]$, ponendo per gli x irrazionali $\Phi(x) = \lim\limits_{r \to x-0} \Phi(r)$ (per r razionale). Mostriamo che la funzione non decrescente Φ così ottenuta è il limite della successione $\{\Phi_n^{(n)}\}$ in tutti i punti di continuità. Sia x^* uno di questi punti. Allora, dato $\varepsilon > 0$, si può trovare un $\delta > 0$ tale che

$$|\Phi(x^*) - \Phi(x)| < \varepsilon/6 \quad \text{allorché } |x^* - x| < \delta. \qquad (13)$$

Consideriamo i punti razionali r' e r'' in modo tale che si abbia $r' < x^* < r''$ e $r' > x^* - \delta$, $r'' < x^* + \delta$. Ora n_0 sia così grande che per $n > n_0$ siano verificate le disuguaglianze

$$|\Phi_n(r') - \Phi(r')| < \varepsilon/6 \quad \text{e} \quad |\Phi_n(r'') - \Phi(r'')| < \varepsilon/6. \qquad (14)$$

Dalle relazioni (13) e (14) deriva che

$$|\Phi_n(r') - \Phi_n(r'')| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Essendo la funzione Φ_n non decrescente, allora $\Phi_n(r') \leqslant \Phi_n(x^*) \leqslant \Phi_n(r'')$. Pertanto

$$|\Phi(x^*) - \Phi_n(x^*)| \leqslant |\Phi(x^*) - \Phi(r')| + |\Phi(r') - \Phi_n(r')| + |\Phi_n(r') - \Phi_n(x^*)| \leqslant \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{4\varepsilon}{6} = \varepsilon,$$

e ciò significa esattamente che $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(x^*) = \Phi(x^*)$.

Abbiamo costruito dunque una successione di funzioni di M convergente alla funzione limite Φ quasi ovunque, tranne, eventualmente, nei punti di discontinuità della funzione Φ. Poiché l'insieme di questi punti non è più che numerabile, applicando di nuovo il procedimento diagonale si può ricavare dalla successione $\{\Phi_n\}$ una sottosuccessione convergente anche in questi punti, cioè convergente ovunque su $[a, b]$.