

Esercizi di Istituzioni di Probabilità a.a. 2021-2022
primo foglio di esercizi

M. Isopi

Esercizio 1.

Sia E un insieme e sia $\mathcal{S}$ un insieme di σ -algebre su E . Definiamo

$$\mathcal{E}^* = \{A \subseteq E : A \in \mathcal{E} \text{ for all } \mathcal{E} \in \mathcal{S}\}$$

Mostrare che $\mathcal{E}^*$ è una σ -algebra su E . Mostrare con un esempio che invece, l'unione di due σ -algebre sullo stesso insieme non è necessariamente una σ -algebra.

Esercizio 2.

Sia Ω un insieme non numerabile e $\mathcal{A} = \sigma(\{\omega\} : \omega \in \Omega)$ e

$$\mathcal{B} = \{A \subset \Omega : A \text{ è numerabile o } A^C \text{ è numerabile}\}.$$

Mostrare che $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Esercizio 3.

Mostrare che i seguenti insiemi di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ generano tutti la stessa σ -algebra:

$$(a) \{(a, b) : a < b\}, \quad (b) \{(a, b] : a < b\}, \quad (c) \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 4.

Sia $(E, \mathcal{E}, \mu)$ uno spazio di misura finito. Mostrare che per ogni successione di insiemi $(A_n : n \in \mathbb{N})$ in $\mathcal{E}$

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n) \leq \limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$$

Mostrare che la prima disuguaglianza rimane vera senza l'ipotesi che μ sia finita, ma l'ultima potrebbe essere falsa.

Esercizio 5.

Sia $\mathcal{A}$ un anello su Ω . Mostrare che $\mathcal{A}$ munito del prodotto $\cap$ e della somma $\triangle$ è un anello (nel senso dell'algebra) commutativo.

Esercizio 6.

Diciamo che un insieme $A \subset \mathbb{N}$ ha densità asintotica θ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |A \cap \{1, 2, \dots, n\}| = \theta$$

Sia $\mathcal{A}$ la collezione di tutti gli insiemi che hanno densità asintotica. $\mathcal{A}$ è un'algebra? È una σ -algebra?

Esercizio 7.

Sia $\Omega = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{F}$ il suo insieme delle parti. Trovare condizioni necessarie e sufficienti sui numeri reali x, y e z , in modo che esista una misura di probabilità $\mathbf{P}$ numerabilmente additiva su $\mathcal{F}$, con $x = P\{1, 2\}$, $y = P\{2, 3\}$, $z = P\{1, 3\}$.

Esercizio 8.

Sia $\Omega = [0, 1]$ e $\mathcal{F}$ la collezione dei sottoinsiemi A di Ω tali che A è finito o cofinito. $\mathbf{P}$ è definita su $\mathcal{F}$ nel modo seguente: $\mathbf{P}(A) = 0$ se A è finito e $\mathbf{P}(A^C) = 1$ se A è finito.

- a) $\mathcal{F}$ è un'algebra?
- b) $\mathcal{F}$ è una σ -algebra?
- c) $\mathbf{P}$ è finitamente additiva?
- d) $\mathbf{P}$ è numerabilmente additiva?