Esercizi di Istituzioni di Probabilità a.a. 2021-2022
decimo foglio di esercizi

M. Isopi

Esercizio 1.

Supponiamo che $X_k \sim \Gamma(3, k)$, ovvero

$$f_{X_k}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2k^3} \mathrm{e}^{-x/k}, & \text{per} \quad x > 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Mostrare che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X_k} - \frac{1}{2} \log n$ converge in probabilità quando $n \to \infty$.

(Suggerimento: ricordate che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \to \gamma$ quando $n \to \infty$, dove $\gamma = 0.5772\ldots$ è la costante di Eulero.

Esercizio 2.

Sia (X_n) una successione di v. a. che converge in probabilità a X. Mostrare che se f è una funzione continua su $\mathbf{R}$, allora $f(X_n) \longrightarrow f(X)$ in probabilità. (Attenzione: f potrebbe non essere uniformemente continuoua e nemmeno limitata. Provate troncando at $\pm A$ per A grande.)

Esercizio 3.

a) Supponiamo che $X_n \xrightarrow{r} X$ con $r \geq 1$. Mostrare che $(|X_n|^r : n \geq 1\}$ è uniformemente integrabile, e dedurne che $\mathbf{E}(X_n^r) \to \mathbf{E}(X^r)$, r intero.

b) Supponiamo invece che $(|X_n|^r : n \geq 1\}$ sia uniformemente integrabile per $r \geq 1$, mostrare che $X_n \xrightarrow{r} X$ if $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$.

Esercizio 4.

Consideriamo X_n con densità

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2 x^2)}, \quad n \geq 1$$

Rispetto a quali nozioni di convergenza X_n converge quando $n \to \infty$?

Esercizio 5.

Sia $Y_1, Y_2, \ldots$ una successione di variabili indipendenti con $\mathbf{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{n}$ e $\mathbf{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ e sia X una v.a. indipendente dalle Y. Dimostrare che $Z_n := X + Y_n$ converge debolmente a X.

Esercizio 6.

Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili indipendenti con distribuzione gaussiana di media 0 e varianza $\frac{1}{n}$. Discutere la convergenza debole di X_n.

Esercizio 7.

Sia $a_1, a_2, \ldots$ una successione di numeri non negativi con $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. definiamo la misura di probabilità $\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i$. Costruire una successione di misure di probabilità μ_n con densità rispetto alla misura di Lebesgue, che converge debolmente a μ.

Esercizio 8.

Sia $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{k/n}$. Mostrare che μ_n converge debolmente alla misura di Lebesgue su $[0, 1]$.

Esercizio 9.

Sia λ la misura di Lebesgue su $\mathbf{R}$ e $\mu_n = \lambda|_{[-n,n]}$ Mostrare che μ_n converge vagamente a λ, ma non converge debolmente.