Esercizi di Istituzioni di Probabilità a.a. 2021-2022
undicesimo foglio di esercizi

M. Isopi

Esercizio 1.

Calcolare la funzione caratteristica della distribuzione di Poisson di parametro λ.

Esercizio 2.

Calcolare la funzione caratteristica della distribuzione esponenziale di parametro λ.

Esercizio 3.

Calcolare la funzione caratteristica della distribuzione normale standard.

Esercizio 4.

Trovare la funzione caratteristica delle seguenti densità:

- $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$
- $f(x) = \frac{1}{2}|x|e^{-|x|}$
- $f(x) = \frac{1}{2a}I_{[-a,a]}$

Esercizio 5.

Usare il teorema di inversione per dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(at)\sin(bt)}{t^2} dt = \pi \min\{a, b\}$$

Esercizio 6.

Sia f la densità della variabile aleatoria X e ϕ la sua funzione caratteristica. Mostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)|^2 dt$$

Esercizio 7.

Sia ϕ la funzione caratteristica della variabile aleatoria X. Mostrare che $\bar{\phi}$, ϕ^2, $|\phi|^2$, $\Re(\phi)$ sono funzioni caratteristiche. A quali variabili aleatorie corrispondono? Mostrare che $|\phi|$ potrebbe non essere una funzione caratteristica.

Esercizio 8.

Sia $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{\frac{i}{n}}$ e λ la misura di Lebesgue su $[0,1]$.

a) Calcolare $\phi_n(t)$, la funzione caratteristica di μ_n.

b) Calcolare $\phi(t)$, la funzione caratteristica di λ.

c) $\phi_n(t)$ converge a $\phi(t)$ per ogni t reale?

d) Cosa ne deduciamo per la convergenza di μ_n?

Esercizio 9.

Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili aleatorie con $\mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ e $\mathbf{P}(X_n = 2) = 1 - \frac{1}{n}$.

a) Calcolare la funzione caratteristica ϕ_{X_n} e trovarne il limite per $n \to \infty$.

b) Trovare una misura μ tale che $\lim \phi_{X_n} = \int e^{itx} d\mu$ e dire se $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Esercizio 10.

Sia $\alpha > 2$, e sia $\phi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ per $t \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $\phi(t)$ non può essere la funzione caratteristica di una distribuzione di probabilità.
(Suggerimento: provare a usare ϕ per calcolare media e varianza).

Esercizio 11.

Sia X una variabile aleatoria con funzione caratteristica φ. Diciamo che X ha una distribuzione reticolare se esistono a e b reali tali che $\mathbf{P}(X \in a + b\mathbb{Z}) = 1$. Mostrare che X ha una distribuzione reticolare se e solo se esiste $t \neq 0$ tale che $|\varphi(t)| = 1$.