Esercizi di Istituzioni di Probabilità a.a. 2021-2022
dodicesimo foglio di esercizi

M. Isopi

Esercizio 1.

a) Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili indipendenti tali che per ogni k, abbiamo $\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$. Mostrare che

$$\sqrt{\frac{3}{n^3}} \sum_{k=1}^{n} k X_k$$

tende in distribuzione a una normale standard.

b) Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili indipendenti e identicamenti distribute con media 0 e varianza σ^2, e poniamo $S_n = \sum_{k=1}^n X_k, n \geq 1$. Determinare $\gamma > 0$ in modo che

$$\frac{\sum_{k=1}^n S_k}{n^\gamma} \xrightarrow{d} N\left(0, b^2\right) \qquad \text{quando} \qquad n \to \infty$$

and determinare $b^2 > 0$.

Esercizio 2.

a) Sia $\lambda_n \in \mathbf{R}^+$ con $\lambda_n \to +\infty$. E sia X_n una successione di variabili aleatorie di Poisson di parametro λ_n. Mostrare che

$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}$$

tende in distribuzione a una normale standard.

b) Dimostrare che

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 3.

a) Siano $X_1, X_2, \ldots$ variabili aleatorie indipendenti, tali che

$$P\left(X_k = k^\alpha\right) = P\left(X_k = -k^\alpha\right) = 1/2, \quad k \geq 1$$

con $\alpha \in \mathbf{R}$. Dimostrare che vale il teorema limite centrale sse $\alpha \geq -1/2$.

b) Supponiamo che X_k siano uniformi su $\left(-k^\alpha, k^\alpha\right)$, con $\alpha \in \mathbf{R}$, e che $X_1, X_2, \ldots$ siano indepindenti.

Determinare la distribuzione limite (quando esiste) di $\sum_{k=1}^n X_k$, opportunamente normalizzata, quando $n \to \infty$.

Esercizio 4.

Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. di media 0 e varianza $\sigma^2 > 0$. Sia

$$\varphi_n(\alpha) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq \alpha n\right)$$

Determinare, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\alpha)$.

Esercizio 5.

Sia X una variabile normale standard e $a > 0$. Mostrare che la variabile aleatoria Y data da

$$Y = \begin{cases} X & \text{se } |X| < a \\ -X & \text{se } |X| \geq a \end{cases}$$

è una variabile normale standard e trovare un'espressione per $Cov(X, Y)$ come funzione della densità di X.

La coppia (X, Y) ha una distribuzione congiuntamente normale?

Esercizio 6.

Ci può essere un teorema limite centrale anche se la varianza è infinita: consideriamo la distribuzione di Pareto bilatera con densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^3}, & \text{for } |x| \geq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Mostrare che la funzione caratteristica

$$\varphi(t) = 1 - t^2 \left(\log \frac{1}{|t|} + \mathcal{O}(1) \right) \qquad \text{quando} \qquad t \to 0$$

b) Siano $X_1, X_2, \ldots$ variabili aleatorie independenti, identicamente distribuite con densità come sopra, e poniamo $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Mostrare che

$$\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{d} N(0,1) \qquad \text{quando} \qquad n \to \infty$$

Notare che la normalizzazione non è la solita $\sqrt{n}$.

Per una dimostrazione alternativa poniamo $Y_n = X_n I \{|X_n| \leq b_n\}$, per una scelta "conveniente" di b_n

a) Calcolare $\mathbf{E}(Y_n)$ and $\mathrm{Var}(Y_n)$;

b) Mostrare che $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ soddisfa le condizioni di Lyapounov e enunciare il teorema limite corrispondente per $\sum_{k=1}^{n} Y_k$;

c) Usare una nozione appropriata di equivalenza asintotica per dimostrare la normalità asyimtotica di S_n.

Esercizio 7.

Mostrare che il teorema limite centrale non può essere esteso alla convergenza in probabilità, ovvero che, se $X_1, X_2, \ldots$ sono variabili aleatorie indipendenti, identicamente distribute con varianza finita, allora la somma, opportunamente normalizzata, converge in distribuzione a una normale standard ma non in probabilità.

Esercizio 8.

Il teorema limite centrale per variabili aleatorie uniformemente limitate è quasi immediato. Ecco un analogo per gli array:

Sia $\{(X_{n,k}, k \geq 1), n \geq 1\}$ un array di variabili aleatorie indipendenti per riga tali che per ogni $n \geq 1$

$$|X_{n,k}| \leq A_n \quad \text{per} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$A_n, n \geq 1$, sono numeri positivi, tali che

$$\frac{A_n}{s_n} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

Mostrare, verificando le condizioni di Lyapounov oppure quelle di Lindeberg, che vale il teorema limite centrale. Notare che le variabili sono uniformemente limitate in ogni riga, ma che i limiti potrebbero tendere a infinito.