Esercizi di Istituzioni di Probabilità a.a. 2021-2022
tredicesimo foglio di esercizi

M. Isopi

Esercizio 1.

Per $X \sim \text{Geo}\ (p)$, e $q = 1 - p$, mostrare che per ogni funzione limitata f con $f(0) = 0$, abbiamo $\mathbf{E}[f(X) - qf(X+1)\ ] = 0$.

Esercizio 2. (equazione di Stein per la distribuzione esponenziale)

Vogliamo dimostrare:
Una variabile aleatoria X ha distribuzione esponenziale di parametro 1, denotata con $X \sim \text{Exp}(1)$, se e solo se

$$\mathbf{E}f'(X) = \mathbf{E}f(X) - f(0), \tag{1}$$

per tutte le $f : \mathbf{R}^+ \mapsto \mathbf{R}$ assolutamente continue tali che $\mathbf{E}\,|f'(Z)| < \infty$, con $Z \sim \text{Exp}(1)$.

- Mostrare che se $X \sim \text{Exp}(1)$ allora vale (1) per f come sopra.
- Mostrare che dalla condizione (1) si deduce che la trasformata di Laplace di X è quella di una variabile esponeziale di parametro 1.

Usando questa caratterizzazione definiamo la seguente equazione di Stein: per una data funzione $h : \mathbf{R}^+ \mapsto \mathbf{R}$, sia $f : \mathbf{R}^+ \mapsto \mathbf{R}$ tale che $f(0) = 0$ e

$$f'(x) - f(x) = h(x) - \mathbf{E}h(Z),$$

con $Z \sim \text{Exp}(1)$. Si noti che f definita in questo modo è unica.

- Mostrare che f è data da

$$f(x) = -e^x \int_x^\infty [h(t) - \mathbf{E}h(Z)]e^{-t}dt$$

Esercizio 3. Supponiamo che X e Y abbiano una distribuzione normale bidimensionale con media 0 , varianze 1 , and coefficiente di correlazione $\rho, |\rho| < 1$. Siano (R, Θ) le coordinate polar i. Determinare la distribuzioe di Θ.

Esercizio 4. Il vettore aleatorio $(X, Y)'$ ha una distribuzione normale bidimensionale con $\operatorname{Var} X = \operatorname{Var} Y$. Mostrare che $X + Y$ e $X - Y$ sono variabili aleatorie indipendenti.

Esercizio 5. Supponiamo che X e Y Abbiano una distribuzione congiuntamente normale con $\mathbf{E}(X)=\mathbf{E}(Y)=0, \operatorname{Var}(X)=\sigma_x^2, \operatorname{Var} Y=\sigma_y^2$, e coefficiente di correlazione ρ. Calcolare $\mathbf{E}(XY)$ and $\operatorname{Var}(XY)$.

Suggerimento: si può utilizzare il fatto che X e un'appropriata combinazione lineare di X e Y sono indipendenti.

Esercizio 6. Sappiamo che se X e Y hanno distribuzione congiuntamente normale allora sono indipendenti se e solo se sono scorrelate. Siano $X \sim N(0,1)$ e $c \geq 0$. Definiamo Y come segue:

$$Y=\begin{cases} X, & \text{for} \quad |X| \leq c \\ -X, & \text{for} \quad |X|>c. \end{cases}$$

(a) Mostrare che $Y \sim N(0,1)$;

(b) Mostrare che X e Y non sono congiuntamente normali;

Sia $g(c)=\operatorname{Cov}(X, Y)$

(c) Mostrare che $g(0)=-1$ e che $g(c) \rightarrow 1$ quanto $c \rightarrow \infty$. Mostrare che esiste c_0 tale che $g\left(c_0\right)=0$ (iovvero tale che X and Y so scorrelate).

(d) Mostrare che X and Y non sono indipendent (quando $c=c_0$).