

Esercizi di Istituzioni di Probabilità a.a. 2021-2022
secondo foglio di esercizi

M. Isopi

Esercizio 1.

Sia P una misura di probabilità sull'insieme Ω e siano A e B due sottoinsiemi misurabili di Ω . Mostrare che $|P(A) - P(B)| \leq P(A \triangle B)$. Inoltre se $B \subset A$, allora $P(A) - P(B) \leq P(A \cap B^c)$.

Esercizio 2.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$ la misura di Lebesgue su $[0,1]$. Siano $A = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ e $B = (0, \frac{2}{3})$. A e B sono indipendenti?

Esercizio 3.

Consideriamo lo spazio $\Omega = \{0, 1, 2\}^2$ con misura di probabilità uniforme su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

a) Mostrare che $X(\omega) = \omega_1$ e $Y(\omega) = \omega_2$ sono indipendenti.

Definiamo $Z_0 = X$, $Z_1 = (X + Y) \bmod 3$, $Z_2 = (X + 2Y) \bmod 3$.

b) Mostrare che le coppie (Z_0, Z_1) , (Z_0, Z_2) , (Z_1, Z_2) sono tutte indipendenti, ma che se conosciamo il valore di Z_0 e Z_1 , allora conosciamo anche quello di Z_2 .

c) Costruire quattro variabili aleatorie a valori in $\{-1, 1\}$ in modo che qualunque tripla sia indipendente, ma non lo sia la quadrupla.

Esercizio 4.

Consideriamo due variabili aleatorie X e Y a valori in $\mathbb{N}$ e indipendenti con

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = k^{-s}/\zeta(s)$$

a) Mostrare che la probabilità che nessun quadrato perfetto, salvo 1, divida X è $1/\zeta(2s)$.

- b) Mostrare che $\mathbf{P}(G = k) = k^{-2s}/\zeta(2s)$, dove G è il massimo comun divisore di X e Y .

Esercizio 5.

Sia $\{A_n, n \geq 1\}$ una successione di insiemi.

- a) Supponiamo che $P(A_n) \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$. Mostrare che esiste una sottosuccessione $\{n_k, k \geq 1\}$, tale che

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k}\right) > 0$$

- b) Mostrare che non rimane necessariamente vero se supponiamo solo che

$$P(A_n) \geq \alpha \quad \text{per ogni } n \tag{1}$$

- c) Mostrare che se $A_n, n \geq 1$, are non crescenti e tali che (??) vale per qualche $\alpha \in (0, 1)$, allora

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \alpha$$

- d) Mostrare che se $A_n, n \geq 1$, sono non decrescenti e

$$P(A_n) \leq \alpha \quad \text{per ogni } n$$

per qualche $\alpha \in (0, 1)$, allora

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \alpha$$

Esercizio 6. Principio di inclusione-esclusione. Mostrare che

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &\quad + \cdots - (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n). \end{aligned}$$

Esercizio 7.

Mostrare che nella situazione del problema precedente

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq 1 - \exp\left\{-\sum_{k=1}^n P(A_k)\right\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \implies P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$

Esercizio 8.

Supponiamo che gli eventi $\{A_n, n \geq 1\}$ siano indipendenti. Mostrare che il principio di inclusione-esclusione si riduce a

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P(A_k))$$

Esercizio 9.

- a) Sia X una variabile aleatoria con $\mathbf{P}(X > 0) > 0$. Dimostrare che esiste un $\delta > 0$ tale che $\mathbf{P}(X > \delta) > 0$.
- b) Siano δ e $\epsilon > 0$ e $X_1, X_2 \dots$ una successione di variabili aleatorie indipendenti non negative tali che $\mathbf{P}(X_i > \delta) > \epsilon$ per ogni i . Dimostrare che con probabilità 1, $\sum_1^{\infty} X_i = \infty$.

Esercizio 10.

Sia $A_1, A_2 \dots$ una successione di eventi indipendenti, e sia $S_x = \{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i} \leq x\}$. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbf{R}$ abbiamo $\mathbf{P}(S_x) = 0$ oppure 1.