Esercizi di Istituzioni di Probabilità a.a. 2021-2022
terzo foglio di esercizi

M. Isopi

Esercizio 1.

Consideriamo la misura di probabilità $\mathbf{P}$ su $\mathbf{R}$ munito della σ-algebra di Borel definita ad

$$\mathbf{P}(B) = \lambda(fI_B)$$

dove λ è la misura di Lebesgue e f una funzione non negativa misurabile. Dimostrare che $\int h\, d\mathbf{P} = \int fh\, d\lambda$ quando $h \geq 0$ o $\int f|h|\, d\lambda < \infty$.

Esercizio 2.

Mostrare che, quando è definita, $\mathbf{Var}(X)$ è sempre non negativa e che $\mathbf{Var}(X) = 0$ se e solo se per qualche a, necessariamente uguale a $\mathbf{E}(X)$, si ha $\mathbf{P}(X = a) = 1$.

Esercizio 3.

Sia $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Trovare condizioni necessarie e sufficienti su a, b e c in modo che si abbia $\mathbf{E}(f(\alpha X)) = \alpha^2 \mathbf{E}(f(X))$ per ogni α reale e ogni variabile aleatoria X.
- Trovare condizioni necessarie e sufficienti su a, b e c in modo che si abbia $\mathbf{E}(f(X - \beta)) = \mathbf{E}(f(X))$ per ogni β reale e ogni variabile aleatoria X.

Esercizio 4.

È vero in generale che $\mathbf{E}(1/X) = 1/\mathbf{E}(X)$? Ci sono variabili aleatorie non costanti per le quali è vero?

Esercizio 5.

Sia X una variabile aleatoria non negativa. Mostrare che

a) $\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty \mathbf{P}(X > t)dt$

b) $\mathbf{E}(X) - 1 \leq \sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}(X \geq n) \leq \mathbf{E}(X)$

Esercizio 6.

Sia X una variabile aleatoria non negativa con $\mathrm{Var}(X) \leq \frac{1}{2}$. Mostrare che

$$\mathbf{P}\big(-1 + \mathbf{E}(X) \leq X \leq 2\mathbf{E}(X)\big) \geq \frac{1}{2}$$

Esercizio 7.

Sia X una variabile aleatoria non negativa e di varianza finita. Mostrare che

$$\mathbf{P}(X > 0) \geq \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$$

Esercizio 8.

Supponiamo che $\mathbf{E}(2^X) = 4$. Dimostrare che $\mathbf{P}(X \geq 3) \leq \frac{1}{2}$.

Esercizio 9. Disuguaglianza di Cantelli.

Sia X una variabile aleatoria di media m e varianza v e $\alpha > 0$. Dimostrare che

$$\mathbf{P}(X - m \geq \alpha) \leq \frac{v}{v + \alpha^2}$$

[Suggerimento: $\mathbf{P}(X - m \geq \alpha) = \mathbf{P}((X - m + y)^2 \leq (\alpha + y)^2)$, poi usare la disuguaglianza di Markov e minimizzare su y].

Esercizio 10. (Formula di Blackwell-Girshick)

Consideriamo variabili $T, X_1, X_2, \ldots$ indipendenti e con varianza finita. T è a valori in $\mathbf{N}$ e le X sono identicamente distribuite. Definiamo

$$S_T = \sum_{i=1}^T X_i$$

Dimostrare che $S_T \in L^2(\mathbf{P})$ e

$$\mathbf{Var}(S_T) = \mathbf{E}(X_1)^2 \mathbf{Var}(T) + \mathbf{E}(T)\mathbf{Var}(X_1)$$

Esercizio 11. (Disuguaglianza di Lyapunov)

Dimostrare che se $0 < s < t$, $(\mathbf{E}(|X|^s))^{1/s} \leq (\mathbf{E}(|X|^t))^{1/t}$

Esercizio 12. (Disuguaglianza di Minkowski)

Siano X e Y variabili aleatorie di quadrato integrabile. La norma L^2 di X è definita come $||X||_2 = \mathbf{E}(X^2)^{\frac{1}{2}}$ Dimostrare che

$$||X+Y||_2 \leq ||X||_2 + ||Y||_2$$

Esercizio 13. (Convessità delle norme L^p)

Sia X una variabile aletoria a valori reali. Sia $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$, e definiamo $0 \leq t \leq 1$ tramite $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}$. Allora

$$||X||_p \leq ||X||_{p_1}^{(1-t)} ||X||_{p_2}^{t}$$