Esercizi di Istituzioni di Probabilità a.a. 2021-2022
quarto foglio di esercizi

M. Isopi

Esercizio 1.

Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di variabili aleatorie non negative di attesa finita che converge quasi certamente ad una variabile aleatoria X, anche questa di attesa finita. Per costanti $n, K \in \mathbb{N}$ sia $Y_{n,K} = \min(X_n, K)$. Dire se sono vere o meno le seguenti affermazioni, giustificando la risposta.

a) $\lim_{K\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(Y_{n,K}) = \mathbf{E}(X)$

a) $\lim_{n\to\infty} \lim_{K\to\infty} \mathbf{E}(Y_{n,K}) = \mathbf{E}(X)$

Esercizio 2.

Supponiamo che $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) \to 0\ \forall \omega \in \Omega$, ma $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n) \neq 0$. Mostrare che $\mathbf{E}(\sup\limits_n |X_n|) = \infty$

Esercizio 3.

Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di variabili aleatorie con $\mathbf{E}(X_n) = 4$ e $\mathbf{V}ar(X_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$. La successione converge in probabilità?

Esercizio 4.

Dare un esempio di successione di variabili aleatorie $\{Y_n\}$ tale che:

a) $\dfrac{Y_n}{n}$ converge a 0 in probabilità;

b) $\dfrac{Y_n}{n^2}$ converge a 0 quasi certamente;

c) $\dfrac{Y_n}{n}$ non converge a 0 quasi certamente.