Esercizi di Istituzioni di Probabilità a.a. 2021-2022
quinto foglio di esercizi

M. Isopi

Esercizio 1.

Siano $X_1, X_2, \ldots$ variabili i.i.d non negative. Usare il lemma di Borel-Cantelli per mostrare che

a) $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} X_n = \begin{cases} 0 \text{ q.c. } & \text{se } \mathbf{E}(X_1) < \infty \\ \infty \text{ q.c. } & \text{se } \mathbf{E}(X_1) = \infty \end{cases}$

b) se $c \in (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} e^{X_n} c^n \begin{cases} < \infty \text{ q.c. } & \text{se } \mathbf{E}(X_1) < \infty \\ = \infty \text{ q.c. } & \text{se } \mathbf{E}(X_1) = \infty \end{cases}$

Esercizio 2.

$X_1, X_2 \ldots$ sono variabili i.i.d. di media μ e varianza σ^2. Mostrare che

$$\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\le i\le j\le n} X_i X_j \to \mu^2$$

in probabilità

Esercizio 3.

$X_1, X_2 \ldots$ sono variabili aleatorie con $\mathbf{V}ar(X_n) < c$ e tali che il coefficiente di correlazione ρ soddisfa una delle due condizioni:

i) $\rho(X_i, X_j) \le 0$ per ogni $i \ne j$

ii) $\rho(X_i, X_j) \to 0$ quando $|i - j| \to \infty$

Mostrare che $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} [X_k - \mathbf{E}(X_k)] \to 0$ in probabilità.

Esercizio 4.

Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili indipendenti con $\mathbf{P}(X_n = 3^n) = \mathbf{P}(X_n = -3^n) = \frac{1}{2}$ e sia $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

a) Calcolare $\mathbf{E}(X_n)$.

b) Determinare $R_n = \sup\{r \in \mathbf{R} : \mathbf{P}(|S_n| \geq r) = 1\}$.

c) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} R_n$.

d) per quali $\epsilon > 0$ abbiamo che $\mathbf{P}(\frac{1}{n}|S_n| \geq \epsilon)$ non tende a zero?

e) C'è contraddizione con le varie leggi dei grandi numeri?

Esercizio 5.

Supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty$ per eventi a due a due indipendenti. Sia $S_n = \sum_{i=1}^n I_{A_i}$, il numero degli eventi che si verificano fra i primi n.

a) Mostrare che $\mathbf{Var}(S_n) \leq \mathbf{E}(S_n)$ e dedurne che $S_n/\mathbf{E}(S_n) \to 1$ in prob.

b) Usare il lemma di Borel-Cantelli per mostrare che $S_{n_k}/\mathbf{E}(S_{n_k}) \to 1$ q.c. quanto $k \to \infty$ e dove $n_k = \inf\{n : \mathbf{E}(S_n) \geq k^2\}$.

c) Mostrare che $\mathbf{E}(S_{n_{k+1}})/\mathbf{E}(S_{n_k}) \to 1$ e dato che $n \mapsto S_n$ è non decrescente dedurne che $S_n/\mathbf{E}(S_n) \to 1$ q.c.

Esercizio 6.

Consideriamo una successione di variabili i.i.d $X_1, X_2, \ldots$ con $\mathbf{P}\big(X_1 = (-1)^k k\big) = \frac{1}{ck^2 \log k}$ per $k \geq 2$ con costante di normalizzazione $c = \sum_k \frac{1}{k^2 \log k}$. Mostrare che $\mathbf{E}|X_1| = \infty$, ma esiste una $\mu < \infty$ non aleatoria tale che $S_n/n \to \mu$ in probabilità.

Integrabilità uniforme

L'integrabilità uniforme è una proprietà di una famiglia di variabili aleatorie che dice che i primi momenti assoluti sono uniformemente limitati e le code delle distribuzioni convergono a 0 uniformemente. Diamo la definizione formale.

Definizione. Una famiglia $\{X_t, t \in T\}$ di variabili aleatorie in L^1 indicizzate da T è uniformemente integrabile (UI) se

$$\sup_{t \in T} E\left(|X_t| \, 1_{|X_t| > a]}\right) = \sup_{t \in T} \int_{[|X_t| > a]} |X_t| \, dP \to 0$$

quando $a \to \infty$; ovvero,

$$\int_{[|X_t| > a]} |X_t| \, dP \to 0$$

quando $a \to \infty$, uniformemente in $t \in T$.

Esercizio 7. Lemma di Scheffé

Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili aleatorie non negative di attesa finita tali che $X_n \to X$ q.c. e $\mathbf{E}(X) < \infty$. Mostrare che $\mathbf{E}(X_n) \to \mathbf{E}(X)$ se e solo se $\{X_n\}$ è uniformemente integrabile.