

Esercizi di Istituzioni di Probabilità a.a. 2021-2022
sesto foglio di esercizi

M. Isopi

Esercizio 1.

Sia I un insieme aperto e limitato di $\mathbf{R}^d$ e P la misura di Lebesgue su I (divisa per il volume di I , così $P(I) = 1$).

Sia $f_n : I \rightarrow \mathbf{R}$ una successione di funzioni uniformemente Lipschitziane, ovvero $|f_n(x) - f_n(y)| \leq C||x - y||$ per una costante C che non dipende da n . Sia $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione *continua*. Mostrare che $f_n \rightarrow f$ puntualmente se e solo se $f_n \rightarrow f$ in probabilità.

Esercizio 2.

Mostrare che la convergenza in probabilità è metrizzabile.

Prima verificare che $d(X, Y) = \mathbf{E} \left(\frac{|X-Y|}{|X-Y|+1} \right)$ definisce una distanza.

Poi mostrare poi che $X_n \rightarrow 0$ in probabilità se e solo se

$$\mathbf{E} \left(\frac{|X_n|}{|X_n| + 1} \right) \rightarrow 0$$

Esercizio 3.

Mostrare che la convergenza quasi certa **non** è metrizzabile.

Esercizio 4. (metrica di Lévy)

Per due funzioni distribuzione F e G , sia

$$d(F, G) = \inf\{\delta > 0 : F(x - \delta) - \delta \leq G(x) \leq F(x + \delta) + \delta \text{ per ogni } x \in \mathbf{R}\}$$

Mostrare che d è una metrica sullo spazio delle funzioni distribuzione.

Esercizio 5. (Convergenza in variazione totale)

Diciamo che la successione di variabile aleatorie discrete X_n , con densità discreta f_n , converge in variazione totale a X con densità discreta f se

$$\sum_x |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

Supponiamo che $X_n \rightarrow X$ in variazione totale, e $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è limitata. Mostrare che $\mathbf{E}(u(X_n)) \rightarrow \mathbf{E}(u(X))$

Esercizio 6. (Convergenza completa)

Una successione $X_1, X_2, \dots$ di variabili aleatorie si dice completamente convergente a X se

$$\sum_n \mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) < \infty \quad \text{for all } \epsilon > 0$$

Mostrare che, per successioni di variabili indipendenti, la convergenza completa è equivalente alla convergenza quasi certa. trovare una successione di variabili aleatorie (dipendenti) che converge quasi certamente ma non completamente.

Esercizio 7. (Lemma di Pratt)

Supponiamo che $X_n \leq Y_n \leq Z_n$ e che $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y$, and $Z_n \xrightarrow{P} Z$. Mostrare che se $\mathbf{E}(X_n) \rightarrow \mathbf{E}(X)$ and $\mathbf{E}(Z_n) \rightarrow \mathbf{E}(Z)$, allora $\mathbf{E}(Y_n) \rightarrow \mathbf{E}(Y)$.

Esercizio 8.

Supponiamo che $X, X_1, X_2, \dots$ siano variabili aleatorie iid positive e $r > 0$. Mostrare che

i $X_n/n^r \rightarrow 0$ quasi certamente;

ii $\mathbf{E}(X^{1/r}) < \infty$;

iii $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X > n^r) < \infty$.

sono equivalenti.

Esercizio 9.

Siano $X_1, X_2, \dots$, variabili aleatorie iid simmetriche, b_n e c_n costanti positive. Assumendo $n\mathbf{P}(|X| > c_n) \rightarrow 0$ e $nb_n^{-2}\mathbf{E}(X^2 1_{\{|X| \leq c_n\}}) \rightarrow 0$, mostrare che

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$$

in probabilità.

Esercizio 10.

Siano $X_1, X_2, \dots$, variabili aleatorie indipendenti tali che $P(|X_i| \leq 1) = 1$ e $\mathbf{E}(X_i) = 0$. a_i sono costanti positive tali che $a_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$.
Mostrare che

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i X_i}{\sum_{i=1}^n a_i} \rightarrow 0, \quad \text{q.c.}$$