Esercizi di Istituzioni di Probabilità a.a. 2021-2022
settimo foglio di esercizi

M. Isopi

Esercizio 1. (paradosso di Borel-Kolmogorov)

Un punto viene scelto uniformemente su una sfera di raggio unitario. Chiamiamo Θ e Φ la latitudine e la longitudine. Trovare la densità condizionata di Θ dato Φ e di Φ dato Θ.

Esercizio 2.

Trovare densità e attesa condizionata di Y data X quando

a) $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \qquad \text{per } 0 \leq x \leq y < \infty;$

b) $f(x, y) = x e^{-x(y+1)} \qquad \text{per } x, y \geq 0.$

Esercizio 3.

X e Y hanno densità congiunta $f(x, y) = cx(y-x)e^{-y}$ per $0 \leq x \leq y < \infty$.

a) Trovare c.

b) Calcolare $f_{X|Y}(x \,|\, y)$, la densità condizionata di X data Y e $f_{Y|X}(y \,|\, x)$.

c) Calcolare $\mathbf{E}(X|Y)$ e $\mathbf{E}(Y|X)$.

Esercizio 4.

Costruire un esempio di due variabili aleatorie X e Y in modo che $\mathbf{E}(Y) = +\infty$, ma $\mathbf{E}(Y|X) < +\infty$ quasi certamente.

Esercizio 5.

Supponiamo che X sia una variabile aleatoria $\mathcal{G}$-misurabile. Dimostrare che $\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = 0$.

Esercizio 6.

Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

a) $\mathbf{E}\left(|X+Y|^r|\mathcal{G}\right) \leq c_r\left(\mathbf{E}\left(|X|^r|\mathcal{G}\right)+\mathbf{E}\left(|Y|^r|\mathcal{G}\right)\right)$
con $c_r = 1$ quando $r \leq 1$ e $c_r = 2^{r-1}$ quando $r \geq 1$

b) (Hölder condizionale)

$$|\mathbf{E}(XY|\mathcal{G})| \leq \mathbf{E}(|XY||\mathcal{G}) \leq \|(X|\mathcal{G})\|_p \cdot \|(Y|\mathcal{G})\|_q$$

con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

c) (Lyapounov condizionale)

$$\|(X|\mathcal{G})\|_r \leq \|(X|\mathcal{G})\|_p \qquad \text{per } 0 < r \leq p$$

d) (Minkowski condizionale)

$$\|((X+Y)|\mathcal{G})\|_p \leq \|(X|\mathcal{G})\|_p + \|(Y|\mathcal{G})\|_p \qquad \text{per } p \geq 1$$

Esercizio 7.

Sia φ una funzione convessa e X una variabile aleatoria con $\mathbf{E}(X) < \infty$ e $\mathbf{E}(\varphi(X)) < \infty$.

a) Mostrare che $\varphi(\mathbf{E}(X|\mathcal{F})) \leq \mathbf{E}(\varphi(X)|\mathcal{F})$

b) Mostrare che l'attesa condizionata è una contrazione in L^p.

Esercizio 8.

Sia Y una variabile aleatoria integrabile. Mostrare che

$$\{\mathbf{E}(Y|\mathcal{G}) : \mathcal{G} \text{ è una sotto- } \sigma \text{ -algebra di } \mathcal{F}\}$$

è uniformemente integrabile.

Esercizio 9.

Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti a media nulla.

a) Mostrare che $\mathbf{E}|X| \leq \mathbf{E}|X+Y|$.

b) Supponiamo inoltre che $\mathbf{E}|X|^r < \infty$ e che $\mathbf{E}|Y|^r < \infty$ per qualche $r > 1$. Mostrare che $\mathbf{E}|X|^r \leq \mathbf{E}|X+Y|^r$.

Esercizio 10.

Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite a media finita. Mostrare che

$$\mathbf{E}(X|X+Y) = \frac{X+Y}{2}$$

Esercizio 11.

Supponiamo che X_1, X_2 siano variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro 1. Trovare

a) $\mathbf{P}[X_1 < 3 \mid X_1 + X_2 = t]$;

b) $\mathbf{E}(X_1 \mid X_1 \wedge t)$;

c) $\mathbf{E}(X_1 \mid X_1 \vee t)$.

Esercizio 12. (Chebyshev condizionale)

Mostrare che per $t > 0$ si ha

$$\mathbf{P}(|X| \geq t \mid \mathcal{F}) \leq t^{-2}\mathbf{E}\left(X^2 \mid \mathcal{F}\right).$$

Esercizio 13.

Supponiamo che X, Y siano variabili aleatorie con momento secondo finito tali che per qualche funzione decrescente f si ha $\mathbf{E}(X \mid Y) = f(Y)$. Mostrare che $\mathrm{Cov}(X, Y) \leq 0$.

Esercizio 14.

Dimostrare le seguenti proposizioni:

- (convergenza monotona condizionale) Se $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$, q.c., per ogni $n \in \mathbf{N}$ and $X_n \to X \in L^1$, q.c., allora

$$\mathbf{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] \nearrow \mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}], \text{ q.c.}$$

- (lemma di Fatou condizionale) Se $X_n \geq 0$, q.c., per ogni $n \in \mathbf{N}$, e $\liminf_n X_n \in \mathcal{L}^1$, allora

$$\mathbf{E}\left[\liminf_n X \mid \mathcal{G}\right] \leq \liminf_n \mathbf{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right], \text{ q.c.}$$

- (convergenza dominata condizionale) Se esiste $\mathrm{Z} \in L^1$ tale che $|X_n| \leq Z$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e se $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$, q.c., allora

$$\mathbf{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] \to \mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}], \text{ q.c. e in } L^1$$

Esercizio 15.

Consideriamo una successione di variabili aleatorie indipendenti $\{Z_n\}$ ognuna con media finita. Siano $X_0 = a$ e $X_n = a + Z_1 + \ldots + Z_n$ for $n \geq 1$. Mostrare che

$$\mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid X_0, X_1, \ldots, X_n\right) = X_n + \mathbf{E}\left(Z_{n+1}\right).$$