Esercizi di Istituzioni di Probabilità a.a. 2021-2022
ottavo foglio di esercizi

M. Isopi

Esercizio 1.

Sia X_n una martingala. Mostrare che $\mathbf{E}[(X_n - X_{n-1})(X_k - X_{k-1})] = 0$.

Esercizio 2.

Sia $X_0, X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili aleatorie con media finita tali che $\mathbf{E}[(X_{n+1} \,|\, X_0, X_1, X_2, \ldots X_n) = aX_n + bX_{n-1}$ con a e b positivi e $a + b = 1$. Trovare un valore di α per il quale $S_n = \alpha X_n + X_{n-1}$ sia una martingala rispetto alla successione X_n.

Esercizio 3.

Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili indipendenti e identicamente distribuite con funzione generatrice dei momenti $M(t)$ e sia $S_n = \sum_1^n X_k$

Mostrare che

$$\frac{e^{tS_n}}{M(t)^n}$$

è una martingala.

Esercizio 4.

a) Sia X una variabile aleatoria con media finita e $a \in \mathbf{R}$. Mostrare che $\mathbf{E}[\max(X, a)] \geq \max[\mathbf{E}(X), a]$.

b) Sia X una submartingala e $a \in \mathbf{R}$. Mostrare che $\max(X, a)$ è ancora una submartingala.

Esercizio 5.

Devo riempire uno zaino scegliendo fra n oggetti; l'i-esimo oggetto havolume V_i e valore W_i, dove $V_1, V_2, \ldots V_n$ e $W_1, W_2, \ldots W_n$ sono variabili aleatorie indipendenti e non negative e $W_i \leq M$ per ogni i. Lo zaino ha volune c e vogliamo massimizzare il valore del suo contenuto. Vogliamo quindi trovare un vettore $z_1, z_2, \ldots, z_n$ di 0 e 1tale che $\sum_1^n z_i V_i \leq c$ e che massimizza $\sum_1^n z_i W_i$. Sia Z il valore massimo possibile del contenuto. Mostrare che $\mathbf{P}(|Z - \mathbf{E}(Z)| \geq x) \leq 2 \exp\left\{-x^2 / \left(2nM^2\right)\right\}$ per $x > 0$.

Esercizio 6.

Sia (X_n) la passeggiata aleatoria simmetrica semplice su $\mathbb{Z}$

a) Mostrare che X è una martingala e $|X|$ una submartingala.

b) Scrivere la decomposizione di Doob $|X| = M + A$ e caratterizzare A.

c) Calcolare $\mathbf{E}\left(|X_n|\right)$.

Esercizio 7.]

Un mazzo con 26 carte rosse e 26 carte nere viene mescolato. Successivamente le carte vengono scoperte una alla volta. In ogni istante un giocatore può dire "la prossima"e se la successiva carta scoperta è rossa il giocatore vince, altrimenti perde. Se il giocatore non parla, vince o perde a seconda se l'ultima carta del mazzo è rossa o nera. Discutere l'esistenza di una strategia che massimizzi la probabilità di vincita.

Esercizio 8.

Tre giocatori iniziano con, rispettivamente, a, b, e c gettoni. Ad ogni turno un giocatore scelto a caso deve cedere un gettone a uno degi altri due, pure scelto a caso. Il gioco termina quando uno dei tre resta senza gettoni. Siano X_n, Y_n e Z_n il numero di gettoni di ognuno dei giocatori dopo n passi.

a) Calcolare $\mathbf{E}\left[X_{n+1}Y_{n+1}Z_{n+1} \,|\, (X_n, Y_n, Z_n) = (x, y, z)\right]$

b) Mostrare che $M_n = X_nY_nZ_n + \frac{n}{3}(a + b + c)$ è una martingala.

c) Calcolare il valore atteso della durata del gioco.

Esercizio 9. (un modello di selezione naturale)

In questo gioco i membri di una popolazione finita S_0 vengono progressivamente rimossi sino a che non ne rimane uno solo. Ad ogni individuo i è assegnata un'idoneità $f(i) > 0$. Le regole del gioco sono le seguenti.

Sia S_n l'insieme degli individui sopravvissuti a primi n turni di gioco. Dato S_n scegliamo l'insieme A_n con probabilità uniforme tra tutti i sottoinsiemi di S_n. Sia poi U_n una variabile aleatoria uniformemente distribuita su $[0,1]$ e indipendente da tutte le estrazioni precedenti. Poniamo

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= A_n \qquad && \text{se} \quad U_n \leq \frac{\sum_{i \in A_n} f(i)}{\sum_{i \in S_n} f(i)} \\ S_{n+1} &= A_n^C \qquad && \text{se} \quad U_n > \frac{\sum_{i \in A_n} f(i)}{\sum_{i \in S_n} f(i)} \end{aligned}$$

a) Mostrare che con probabilità 1 S_n è definitivamente un singoletto $\{X\}$.

b) Fissato $i \in S_0$ e per ogni $n \geq 0$ definiamo

$$Z_n^i = \begin{cases} \frac{f(i)}{\sum_{i \in S_n} f(i)} & \text{se} \quad i \in S_n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Mostrare che $\{Z_n^i\}_{n \geq 0}$ è una martingala.

c) Trovare la distribuzione di X.

d) Cosa cambia se modifichiamo la regola per scegliere l'insieme S_n?