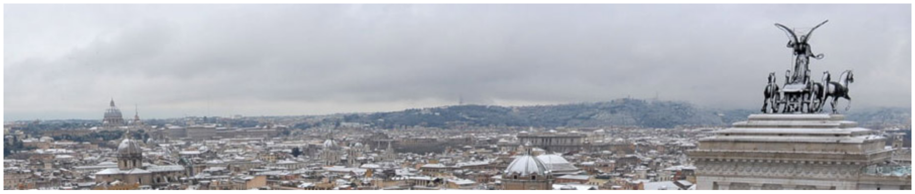

Figura 1. Roma, sabato 4 febbraio 2012.

ANALISI

Soluzioni primo appello

8 febbraio 2012
(ex 6 febbraio)

1.1. Esercizio. *Data la successione di numeri complessi*

$$z_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) i \right)^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

- *determinare modulo e argomento di z_n per ogni $n \in \mathbb{N}$;*
- *dire se la successione $\{z_n\}$ é limitata in $\mathcal{C}$;*
- *dire se la successione $\{z_n\}$ é convergente in $\mathcal{C}$;*
- *determinare una sottosuccessione di $\{z_n\}$ che sia convergente in $\mathcal{C}$.*

Soluzione:

I numeri z_n sono espressi da prodotti: pertanto tenuto conto che

- il modulo di un prodotto é il prodotto dei moduli dei fattori,
- l'argomento di un prodotto é la somma degli argomenti dei fattori

si ha:

$$\begin{cases} z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n i^n \quad \rightarrow \quad |z_n| = \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right|^n |i|^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ \arg(z_n) = n \arg\left(1 + \frac{1}{n}\right) + n \arg(i) = n\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Tenuto conto che la successione dei moduli

$$|z_n| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é convergente
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$
si riconosce che la successione di numeri complessi $\{z_n\}$ é limitata.

La successione $\{z_n\}$ non é convergente: infatti la sottosuccessione dei termini di posto pari
$$z_{2n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (-1)^n$$
é formata di termini reali che, a seconda della paritá di n si approssimano alternativamente su e e su $-e$, circostanza che esclude che l'intera successione $\{z_n\}$ sia convergente.

La sottosuccessione formata dai termini multipli di 4
$$z_{4n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n i^{4n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
é convergente.

La sottosuccessione indicata non é l'unica convergente.
L'esistenza di (infinite) sottosuccessioni convergenti era del resto garantita dal fatto che la $\{z_n\}$ era limitata (Teorema di Bolzano).

1.2. Esercizio.

- *Dire per quali $x \in [0, 2\pi]$ la serie*
$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+\cos(x))^n$$
é convergente e calcolarne la somma.
- *Dire per quali $x \in [0, 2\pi]$ la serie*
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\cos(x))^n}{n!}$$
é convergente.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La prima serie assegnata
$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+\cos(x))^n$$

é una serie geometrica relativa alla base

$$q = 1 + \cos(x)$$

essa é pertanto convergente se e solo se $|q| < 1$, e quindi se e solo se

$$\cos(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} < x < 3\frac{\pi}{2}$$

La somma é pertanto

$$\forall x \in (\frac{\pi}{2}\,,\, 3\frac{\pi}{2}) : \; S(x) = \frac{1}{1 - (1 + \cos(x))} = -\frac{1}{\cos(x)}$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + \cos(x))^n}{n!}$$

é una serie a termini si segno variabile.
Il criterio del rapporto

$$\left| \frac{\frac{(1+\cos(x))^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(1+\cos(x))^n}{n!}} \right| = \frac{|1 + \cos(x)|}{n + 1}$$

tenuto conto che

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; \lim_{n\to\infty} \frac{|1 + \cos(x)|}{n + 1} = 0$$

permette di riconoscere che la serie é assolutamente convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Pertanto la serie é convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Ricordando la nota espressione della funzione esponenziale

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

si riconosce che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + \cos(x))^n}{n!} = e^{1+\cos(x)}$$

1.3. Esercizio. *Data l'equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti*

$$y'(t) - \frac{1}{t^2}\, y(t) = -e^{-1/t}, \qquad t > 0,$$

- *determinarne la soluzione generale,*
- *determinare la soluzione che soddisfa la condizione* $y(1) = -1/e$.

SOLUZIONE:

La soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea assegnata é espressa dalla somma

- della generica soluzione dell'equazione omogenea,
- di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Soluzione $y_0(t)$ dell'omogenea:
Tenuto conto che

$$-\frac{1}{t^2} = \left(\frac{1}{t}\right)'$$

si riconosce che

$$y'(t) - \frac{1}{t^2}\, y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{1/t} y'(t) - \frac{1}{t^2} e^{1/t} y(t) = \left(e^{1/t}\, y(t)\right)' = 0$$

da cui

$$\forall t > 0 : \; e^{1/t}\, y(t) = k \quad \to \quad y_0(t) = k e^{-1/t}$$

Soluzione $\overline{y}(t)$ della non omogenea:

$$y'(t) - \frac{1}{t^2}\, y(t) = -e^{-1/t} \quad \Leftrightarrow \quad e^{1/t} y'(t) - \frac{1}{t^2} e^{1/t} y(t) = -1$$

da cui

$$\forall t > 0 : \; e^{1/t}\, y(t) = -t \quad \to \quad \overline{y}(t) = -t\, e^{-1/t}$$

La soluzione generale dell'equazione non omogenea assegnata é pertanto

$$y(t) = -t\, e^{-1/t} + k e^{-1/t}$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato é pertanto

$$y(1) = -\, e^{-1} + k e^{-1} = -e^{-1} \quad \to \quad k = 0 \quad \to \quad y(t) = -t\, e^{-1/t}$$

1.4. Esercizio. *Calcolare i seguenti integrali:*

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{2+x}\,dx \qquad\qquad \int_0^{\pi/4} \sin^2(2x)\,dx.$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\boxed{\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{2+x}\,dx}$$

La sostituzione

$$\sqrt{x} = t \quad \to \quad x = t^2, \quad t \in [0,2]$$

trasforma

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{2+x}\,dx = \int_0^2 \frac{t}{2+t^2}\,2t\,dt = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{2}{t^2+2}\right) dt =$$

$$= 4 - \frac{4}{\sqrt{2}}\ \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\right)$$

$$\boxed{\int_0^{\pi/4} \sin^2(2x)\,dx}$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin^2(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)dt = \frac{1}{2}\left\{-\cos(t)\sin(t)|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2(t)\right) dt \quad \to \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)dt = \frac{\pi}{4}$$

Da cui

$$\int_0^{\pi/4} \sin^2(2x)dx = \frac{\pi}{8}$$

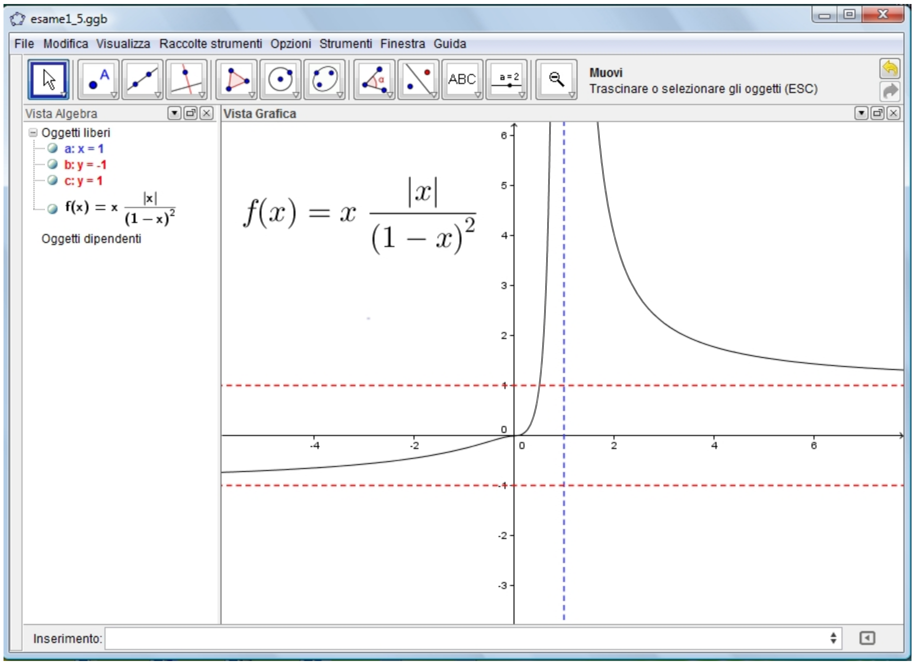

FIGURA 2. $f(x) = \frac{x|x|}{x^2-2x+1}$

1.5. Esercizio. *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{x|x|}{x^2 - 2x + 1},$$

determinarne

- *dominio di definizione,*
- *limiti agli estremi del dominio,*
- *eventuali asintoti,*
- *intervalli di crescenza e decrescenza,*
- *intervalli di concavitá e convessitá.*

Tracciarne infine un grafico qualitativo.

SOLUZIONE:

Tenuto presente che

$$f(x) = \frac{x|x|}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x|x|}{(x-1)^2}$$

si riconosce che la funzione é definita per $x \neq 1$.
La presenza del modulo conduce a riconoscere che

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{(x-1)^2} & se \quad x \leq 0 \\ \\ \dfrac{x^2}{(x-1)^2} & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to\pm1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

Le rette

$$y = -1, \quad x = 1, \quad y = 1$$

sono asintoti, due orizzontali e uno verticale.
L'espressione della derivata prima é

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x}{(x-1)^3} & se \quad x \leq 0 \\ \\ \dfrac{2x}{(x-1)^3} & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

espressione valida anche per $x = 0$.
Riesce pertanto

$$\begin{cases} x < 1 & \rightarrow \quad f'(x) \geq 0 \\ x > 1 & \rightarrow \quad f'(x) \leq 0 \end{cases}$$

La funzione é crescente quindi nell'intervallo $(-\infty, 1)$ e decrescente nell'intervallo $(1, +\infty)$.
Tenuto conto dei limiti agli estremi riesce

- $x < 1 \quad \rightarrow \quad f(x)$ crescente da -1 a $+\infty$,
- $x > 1 \quad \rightarrow \quad f(x)$ decrescente da $+\infty$ a 1.

L'espressione della derivata seconda é

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4x+2}{(x-1)^4} & se \quad x \leq 0 \\ \\ \dfrac{4x+2}{(x-1)^4} & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{cases} x < -1/2 & \rightarrow \quad f''(x) > 0 \\ -1/2 < x < 0 & \rightarrow \quad f''(x) < 0 \\ 0 < x < 1 & \rightarrow \quad f''(x) > 0 \\ 1 < x & \rightarrow \quad f''(x) > 0 \end{cases}$$

Quindi la funzione é

- convessa negli intervalli $(-\infty, -1/2), \ (0, 1), \ (1, +\infty)$

- concava nell'intervallo $(-1/2,\, 0)$.