ANALISI

Soluzione esercizi

18 novembre 2011

6.1. Esercizio.
Usando la definizione, verificare la validità dei seguenti limiti :

$$\lim_{x\to 2} 3x+2=8\,,\qquad \lim_{x\to a} x^2=a^2\,,\quad a=1\,,\,2$$

calcolando per ogni $\epsilon>0$ *il relativo* δ_ϵ.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$|3x+2-8|=|3x-6|=3|x-2|$$

Pertanto

$$|x-2|\le\frac{1}{3}\varepsilon\quad\to\quad|3x+2-8|\le\varepsilon$$

Se $a=0$ allora

$$|x|\le\sqrt{\varepsilon}\quad\to\quad|x^2|\le\varepsilon$$

se $a>0$ allora per $x\in(a/2,3a/2)$ riesce

$$|z^2-a^2|=|x-a||x+a|\le\frac{5a}{2}|x-a|$$

da cui

$$|x-a|\le\min\left(\frac{\varepsilon}{\frac{5a}{2}},\frac{a}{2}\right)\quad\to\quad|x^2-a^2|\le\varepsilon$$

6.2. Esercizio.
Ricordati i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\,,\quad\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\,,\quad\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

calcolare, se esistono, i limiti che seguono oppure discutere se esistono almeno i limiti sinistro e destro:

$(a)\ \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

$(c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x}$ $\qquad (d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$(e)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x}{3-x}$ $\qquad (f)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^{1/3}-1}$

$(g)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{\sin(x)}$ $\qquad (h)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

$(i)\ \lim_{x\to 0} \frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$ $\qquad (l)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x+x^2}{x^3+1}$

$(m)\ \lim_{x\to 0} \arctan(\frac{1}{x})$ $\qquad (n)\ \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sin(\pi x)}.$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\boxed{\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}}$$

Tenuto conto che

$$\frac{x^3+8}{x^2-4} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$$

riesce

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-2)} = -3$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}}$$

Tenuto conto che

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & se \quad x>0 \\ -1 & se \quad x<0 \end{cases}$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Non esiste pertanto il limite nel punto $x_0 = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x}}$$

Tenuto conto che

$$\frac{\tan(2x)}{x} = \frac{\sin(2x)}{x\,\cos(2x)} = 2\frac{\sin(2x)}{2x}\,\frac{1}{\cos(2x)}$$

riesce

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x}\,\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(2x)} = 2$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}}$$

Tenuto conto che

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

Ne segue

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x}{3-x}}$$

Tenuto conto che

$$\frac{x^2+x}{3-x} = x\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}-1}$$

ne segue

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x}{3-x} = \lim_{x\to +\infty} x\,\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}-1} = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^{1/3}-1}}$$

Tenuto conto che

$$a^3-1 = (a-1)(a^2+a+1) \quad \to \quad a-1 = \frac{a^3-1}{a^2+a+1} \quad \to$$

$$\to \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$$

si ha pertanto

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x^{1/3}-1} = \frac{((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1)\,(\sqrt{x}-1)}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

Ne segue

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x^{1/3}-1} = \frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

da cui

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^{1/3}-1} = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\sin(x)}}$$

Tenuto conto che

$$\frac{1-e^x}{\sin(x)} = -\frac{e^x-1}{x}\,\frac{x}{\sin(x)} = -\frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}}$$

ne segue che

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\sin(x)} = -\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}} = -1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}}$$

Tenuto conto che

$$\frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = \frac{\log\left(1+[\cos(x)-1]\right)}{\cos(x)-1}\,\frac{\cos(x)-1}{x^2}$$

Tenuto conto che

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t} = 1 \quad\to\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+[\cos(x)-1]\right)}{\cos(x)-1} = 1$$

e che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

si ricava

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}}$$

Tenuto conto che

$$x\approx 0 \quad\to\quad \begin{cases}|2x-1|=1-2x\\ |2x+1|=1+2x\end{cases}$$

si ha

$$x\approx 0 \quad\to\quad \frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}=\frac{1-2x-1-2x}{x}=-4$$

e quindi, naturalmente

$$\lim_{x\to 0}\frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}=-4$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x+x^2}{x^3+1}}$$

Tenuto conto che

$$x>0 \quad\to\quad e^x>\frac{x^4}{4!}$$

si ha

$$\frac{\mathrm{e}^x+x^2}{x^3+1}\geq\frac{\dfrac{x^4}{4!}+x^2}{x^3+1}$$

da cui tenuto conto che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^4}{4!}+x^2}{x^3+1}=+\infty$$

ne segue

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x+x^2}{x^3+1}=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\arctan(\frac{1}{x})}$$

Tenuto conto che

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

ne segue

$$\lim_{x\to 0^-}\arctan(\frac{1}{x})=-\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to 0^+}\arctan(\frac{1}{x})=+\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sin(\pi x)}}$$

Tenuto conto che

$$\sin(\pi x = -\sin(\pi(x-1))$$

si ha

$$\frac{x-1}{\sin(\pi x)} = -\frac{1}{\pi}\frac{\pi(x-1)}{\sin(\pi(x-1))}$$

da cui

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sin(\pi x)} = -\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\pi(x-1)}{\sin(\pi(x-1))} = -\frac{1}{\pi}$$

6.3. Esercizio.

Al variare di $a \in \mathbb{R}$ calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-x^2}{a^x}, \quad a > 0\,.$$

SOLUZIONE:

- $a = 1 \quad \to \quad \frac{x-x^2}{a^x} = x - x^2 \quad \to \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x-x^2}{a^x} = -\infty$
- $a < 1 \quad \to \quad a^x < 1 \quad \to \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x-x^2}{a^x} < \lim_{x\to+\infty}(x - x^2) \quad \to \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x-x^2}{a^x} = -\infty$
- $a > 1 \quad \to \quad a = 1+h \quad \to \quad a^n > \binom{n}{3}h^3 \quad \to \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x-x^2}{a^x} = 0$

6.4. Esercizio.

Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che le seguenti funzioni siano continue in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos(x) & x \le 0 \\ ax^2 + b & x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2\sin(\pi x) & x \le 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$$

Determinare il grafico di f e di g in corrispondenza di una delle coppie lecite, a scelta.

SOLUZIONE:

La funzione $f(x)$ é continua, qualunque siano a e b in ogni punto $x_0 \neq 0$.

Tenuto presente che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = b$$

la funzione f é continua anche nell'origine se e solo se $b = 2$.

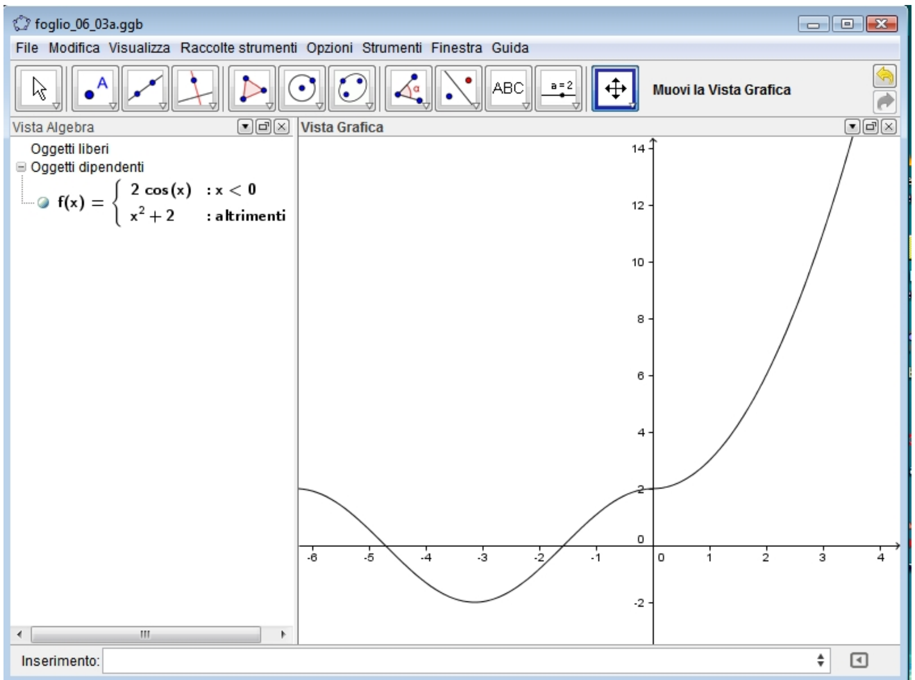

FIGURA 1. Es.4 $f(x)$

La funzione $g(x)$ é continua, qualunque siano a e b in ogni punto $x_0 \neq 1$. Tenuto presente che

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = a + b$$

la funzione g é continua anche nell'origine se e solo se $0 = a + b$.

6.5. Esercizio.

Determinare $b \in \mathbb{R}$ in modo che la seguente funzione sia continua in $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} b\cos(x) & x < 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Disegnare il grafico di g.

SOLUZIONE:

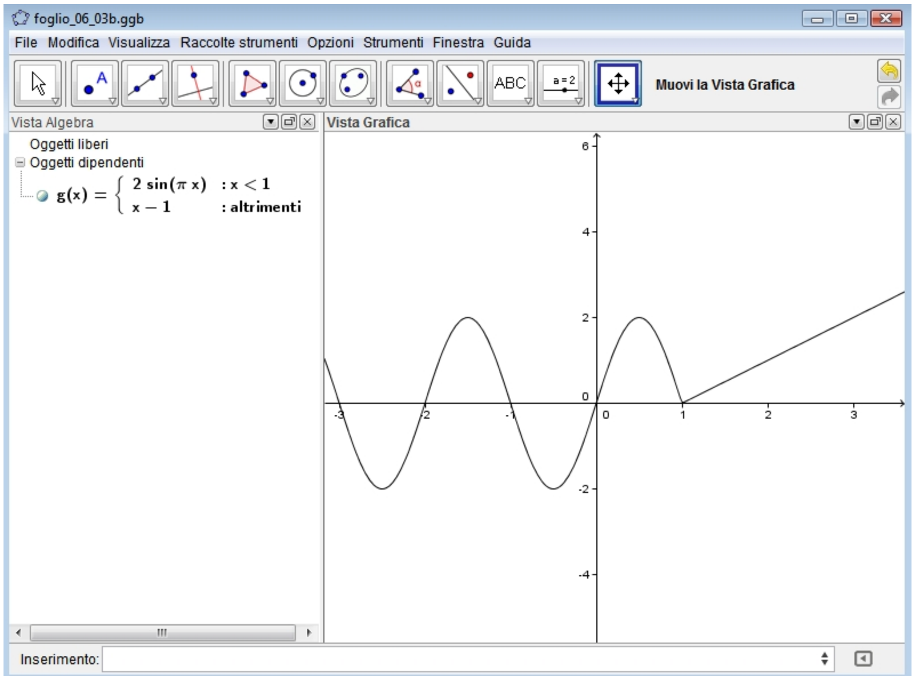

FIGURA 2. Es.4 $g(x)$

Tenuto presente che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

ne segue che la funzione $g(x)$ é continua se e solo se $b = 1$.

6.6. Esercizio. *Assegnati n numeri $x_1, x_2, \ldots x_n$ diversi tra loro sia*

$$f(x) = \min\{|x - x_1|, |x - x_2|, \ldots |x - x_n|\}$$

- *determinare gli estremi inferiore e superiore di f,*
- *esaminare se $f(x)$ è continua,*
- *esaminare se $f(x)$ è lipschitziana.*

SOLUZIONE:

La funzione $f(x)$ é non negativa e nulla in ciascuno degli n punti assegnati, quindi:

$$\inf f(x) = 0 = \min f(x)$$

pensando ai limiti per $x \to \pm\infty$ si riconosce che $f(x)$ é illimitata superiormente:

$$\sup f(x) = +\infty$$

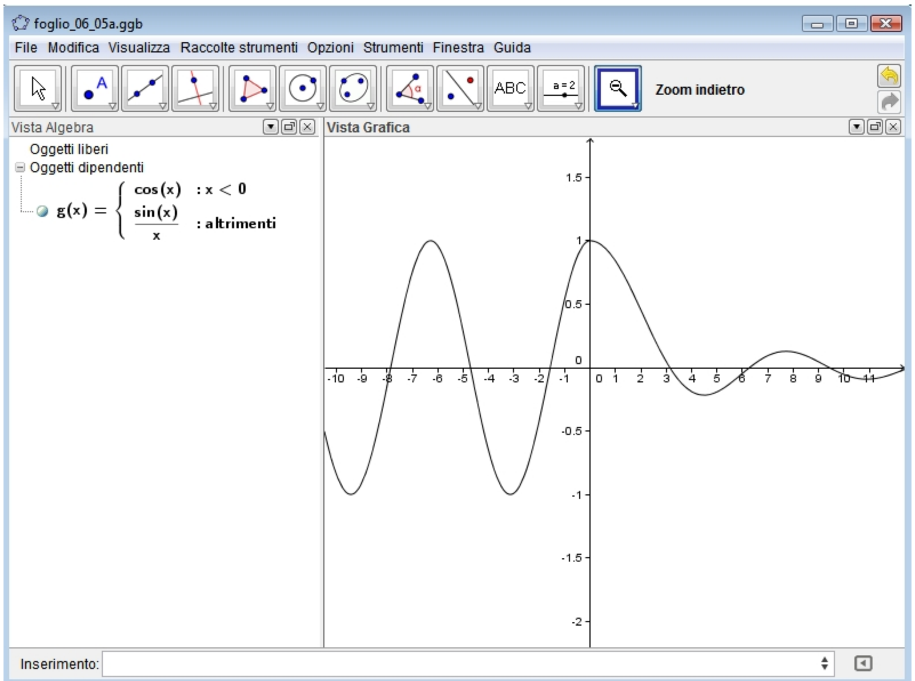

FIGURA 3. Es.5 $g(x)$

Le funzioni

$$g_i(x) = |x - x_i| \quad i = 1, ..., n$$

sono continue.
É possibile riconoscere che se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue (naturalmente definite sullo stesso insieme) anche le funzioni

$$m(x) = \min\{f(x),\, g(x)\}, \qquad M(x) = \max\{f(x),\, g(x)\}$$

sono continue.

Quindi la funzione $f(x) = \min\{|x - x_1|, |x - x_2|, \ldots |x - x_n|\}$, minimo di un numero finito di funzioni continue é continua.

La differenza $f(a) - f(b)$ é sempre minore o uguale della distanza tra a e b, come si riconosce pensando al grafico, una poligonale con pendenze fisse a 45^0,

$$|f(a) - f(b)| \leq |a - b|$$

quindi f é lipschitziana con costante $L = 1$.

6.7. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & se\ x \leq 0 \\ \dfrac{x}{1+x} & se\ x > 0 \end{cases}$$

- *esaminare se è limitata,*
- *esaminare se è continua,*
- *determinare l'immagine,*
- *determinare l'inversa.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

- La funzione non é limitata inferiormente: basta riconoscere che $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.
- É ovviamente continua in ogni $x_0 \neq 0$ ed é anche continua in $x_0 = 0$ in quanto
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$
- L'immagine é un intervallo:
  - illimitato inferiormente,
  - limitato superiormente da 1, valore mai raggiunto.

  ne discende che l'immagine é la semiretta aperta $(-\infty, 1)$.
- L'inversa corrisponde alla risolubilitá dell'equazione
$$f(x) = y$$
  - se $y \leq 0 \quad \to \quad y = x^3 \quad \to \quad x = \sqrt[3]{y}$
  - se $y > 0 \quad \to \quad y = \dfrac{x}{1+x} \quad \to \quad x = \dfrac{y}{1-y}$

6.8. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$f(x) = \frac{\log(1+|x|)}{|x|}$$

- *determinare l'insieme di definizione,*
- *esaminare se è prolungabile per continuità a tutto* $\mathbb{R}$
- *determinare l'immagine.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

La funzione é definita per $x \neq 0$, riesce inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-x)}{-x} = 1$$

La funzione quindi é prolungabile per continuitá su $x = 0$ attribuendole il valore $f(0) = 1$.

L'immagine di $f(x)$ é l'intervallo $I = (0, 1]$.

6.9. Esercizio. **(a)** Dimostrare che l'equazione

$$3x^3 - 8x^2 + x + 3 = 0$$

ha tre radici reali.

(b) Dimostrare che le seguenti equazioni ammettono almeno una soluzione positiva:

$$\textbf{(i)} \quad e^x - e^{\sin(x)} - 1 = 0; \qquad \textbf{(ii)} \quad x + \sin(x)\cos(x) - 1 = 0.$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$\boxed{3x^3 - 8x^2 + x + 3 = 0}$

Considerato che la funzione $f(x) = 3x^3 - 8x^2 + x + 3$ vale

$$f(-1) = -9, \;\; f(0) = 3, \;\; f(1) = -1, \;\; f(3) = 15$$

se ne deduce, per il teorema d'esistenza degli zeri che esistono tre punti (almeno)

$$\xi_1 \in [-1, 0], \;\; \xi_2 \in [0, 1], \;\; \xi_3 \in [1, 3]$$

in cui la funzione vale zero.

$\boxed{e^x - e^{\sin(x)} - 1 = 0}$

Stesso ragionamento del caso precedente osservando che nel punto $x = 0$ la funzione é negativa e in punti $x > 0$ abbastanza grandi é positiva.

$\boxed{x + \sin(x)\cos(x) - 1 = 0}$

Stesso ragionamento del caso precedente osservando che nel punto $x = 0$ la funzione é negativa e nel punto $\pi/2$ é positiva.

6.10. Esercizio. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, continua, essendo $\mathbb{Q}$ i razionali: dimostrare che se $f(1) = 1$ allora f é costante.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Se f non fosse costante allora ci sarebbero almeno due punti a e b in cui riesce $f(a) \neq f(b)$: ma allora, per il teorema dei valori intermedi f dovrebbe prendere tutti i valori $\eta \in [f(a), f(b)]$ e quindi....

....anche valori non razionali !