

CORSO DI LAUREA IN FISICA, FISICA E ASTROFISICA
PROVA IN ITINERE - 7/12/2011

2.1. Esercizio.

Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x^2 + 4x + 5}$$

- determinare l'insieme di definizione e gli eventuali asintoti,
- determinare gli intervalli di crescita e/o decrescenza e gli eventuali punti di massimo e/o minimo,
- disegnare il grafico.

SOLUZIONE:

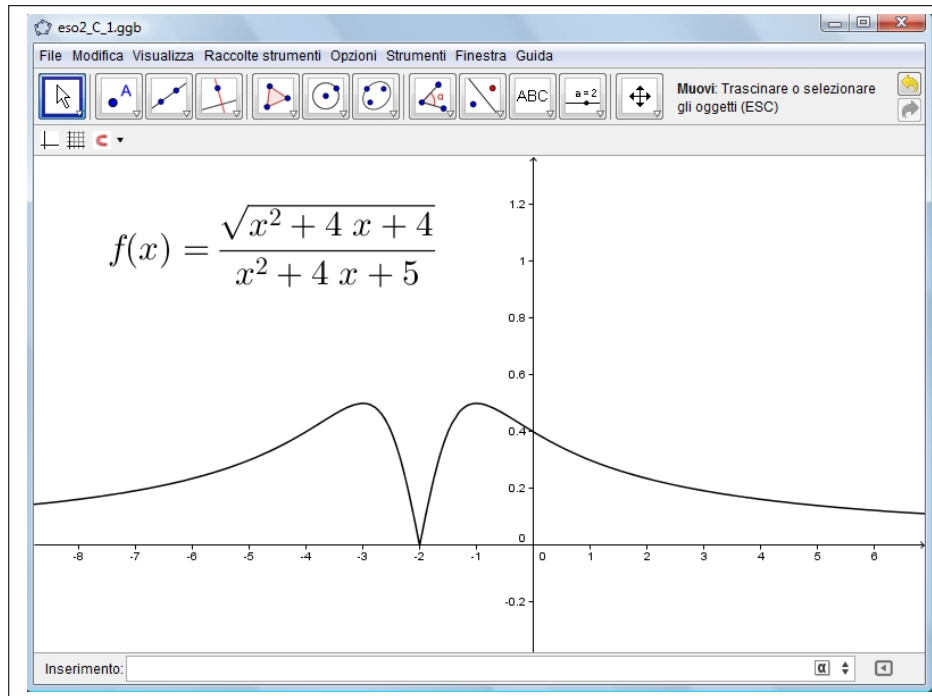


FIGURA 1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x^2 + 4x + 5}$

Tenuto conto che $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ si ha

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x^2 + 4x + 5} = \frac{|x + 2|}{|x + 2|^2 + 1}$$

Il denominatore non si annulla mai, quindi la funzione é definita in tutto \mathbb{R} .

Inoltre riesce $f(x) \geq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x+2|}{|x+2|^2+1} = 0$$

La funzione é simmetrica rispetto ad $x = -2$, cioè $f(-2+h) = f(-2-h)$: basta pertanto determinarne il grafico per $x \geq -2$

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+2)^2+1} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1-(x+2)^2}{((x+2)^2+1)^2}$$

Da cui, limitatamente alla semiretta $x > -2$, $f'(x)$ é positiva in $(-2, -1)$ e negativa dopo: quindi $f(x)$ é crescente in $(-2, -1)$ e decrescente dopo. Tenuto presente che

$$f(-2) = 0, \quad f(-1) = 1/2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

si riconosce, vedi figura 1, che

$$\text{minimo} = 0 = f(-2), \quad \text{massimo} = f(-1) = \frac{1}{2}$$

Nel punto $x = -2$ la funzione non é derivabile.

Osservazione 2.1. *Che la funzione*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2kx + k^2}}{x^2 + 2kx + k^2 + 1} = \frac{|x+k|}{|x+k|^2+1}$$

abbia, qualunque sia $k \in \mathbb{R}$ minimo 0 e massimo $1/2$ era del resto ovvio:

$$2|a| \leq a^2 + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{|x+k|}{|x+k|^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

e quindi

$$f(-a) = 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} = f(1-a)$$

2.2. Esercizio.

- Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3k+1} x^k$ é assolutamente convergente e per quali $x \in \mathbb{R}$ é convergente.
- Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{k=2}^{\infty} (3+x)^k$ é convergente e determinarne la somma.

SOLUZIONE:

Dal criterio del rapporto segue che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3k+1} x^k$ é assolutamente convergente se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{k+1}{3k+1} x^k \right|}{\left| \frac{k}{3(k-1)+1} x^{k-1} \right|} = |x| < 1$$

Agli estremi $x = \pm 1$ la serie non é convergente perché il termine generale non riesce per tali valori infinitesimo.

La serie geometrica $\sum_{k=2}^{\infty} (3+x)^k$ é convergente per

$$|3+x| < 1 \quad \rightarrow \quad -4 < x < -2$$

La somma vale

$$S = (3+x)^2 \frac{1}{1-(3+x)} = -\frac{(3+x)^2}{x+2}$$

2.3. Esercizio.

Assegnata la funzione $f(x) = \log(1+4x)$

- calcolare i polinomi di Taylor $T_1(x)$ e $T_2(x)$ di punto iniziale $x_0 = 0$ e ordini 1 e 2,
- provare che riesce $\forall x \geq 0 : T_2(x) \leq f(x) \leq T_1(x)$.

SOLUZIONE:

$$T_1(x) = 4x, \quad T_2(x) = 4x - \frac{16}{2}x^2$$

Per provare la disuguaglianza richiesta:

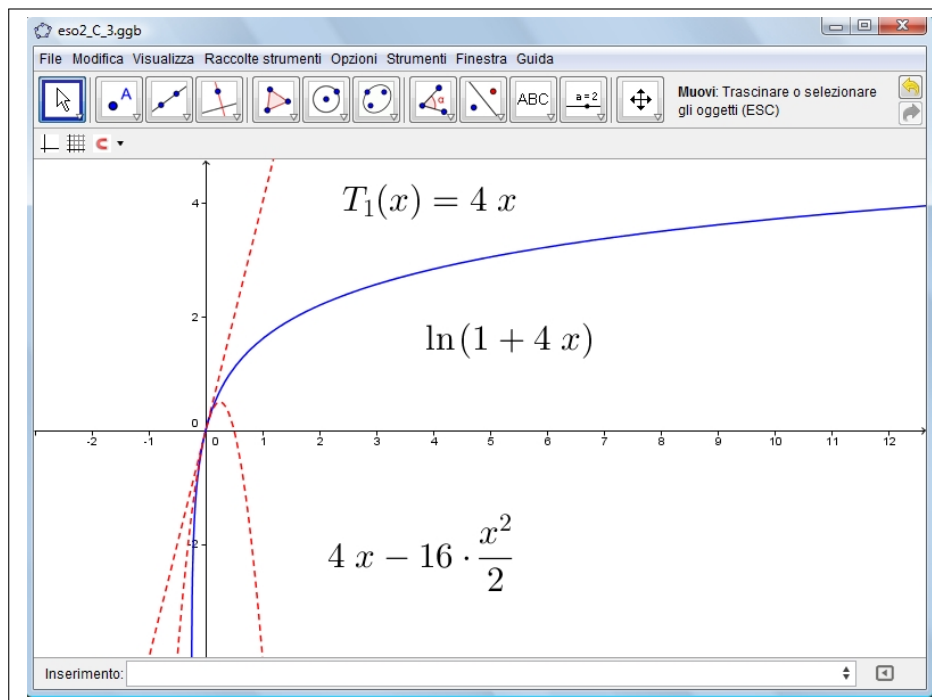
- $\log(1+4x) \leq 4x$ si ricava dal fatto che la $y = 4x$ é tangente al grafico in corrispondenza dell'origine e la funzione $\log(1+4x)$ é concava,
 - posto $d(x) = \log(1+4x) - 4x + 16/2 x^2$ é facile riconoscere che $d(0) = 0$ e che per $x \geq 0$ riesce $d'(x) \geq 0$, per cui
- $$\forall x \geq 0 : 0 = d(0) \leq d(x) \quad \rightarrow \quad T_2(x) \leq \log(1+4x)$$

2.4. Esercizio.

Assegnata la funzione

$$f(x) = e^x + 9e^{-x} \quad x \in \mathbb{R}$$

- determinare l'immagine $f(\mathbb{R})$ di f ,

FIGURA 2. $f(x) = \log(1 + 4x)$

- determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = k$ non ha soluzioni, ha una soluzione, ha due soluzioni.

SOLUZIONE:

L'immagine di f é un intervallo determinato dall'*inf* e dal *sup* di f :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \quad \rightarrow \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = +\infty$$

Per determinare il minimo

$$f'(x) = e^x - 9e^{-x} : f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad e^{2x} = 9 \quad \rightarrow \quad e^x = 3 \quad \rightarrow \quad x = \log(3)$$

Ne segue

$$\text{minimo} = f(\log(3)) = 6$$

L'immagine di f é pertanto l'intervallo $[6, +\infty)$.

Tenuto conto che

$$\begin{cases} x < \log(3) & \rightarrow & f'(x) < 0 & \rightarrow & f(x) \searrow \\ x > \log(3) & \rightarrow & f'(x) > 0 & \rightarrow & f(x) \nearrow \end{cases}$$

Pertanto l'equazione $f(x) = k$:

- non ha soluzioni se $k < 6$

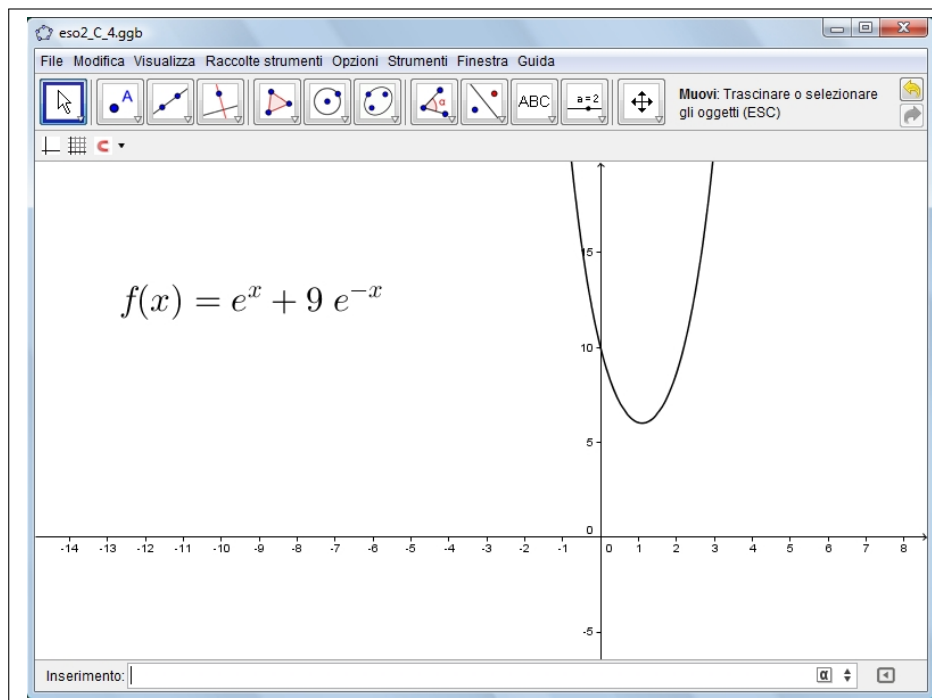


FIGURA 3. $f(x) = e^x + 9e^{-x}$ $x \in \mathbb{R}$

- ha una sola soluzione se $k = 6$
- ha due soluzioni se $k > 6$.