CORSO DI LAUREA IN FISICA, FISICA E ASTROFISICA
Prova in itinere - 7/12/2011

2.1. Esercizio.
Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x^2+6x+10}$$

- *determinare l'insieme di definizione e gli eventuali asintoti,*
- *determinare gli intervalli di crescenza e/o decrescenza e gli eventuali punti di massimo e/o minimo,*
- *disegnare il grafico.*

Soluzione:

Tenuto conto che $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ si ha

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x^2+6x+10} = \frac{|x+3|}{|x+3|^2+1}$$

Il denominatore non si annulla mai, quindi la funzione é definita in tutto $\mathbb{R}$.
Inoltre riesce $f(x) \geq 0$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x+3|}{|x+3|^2+1} = 0$$

La funzione é simmetrica rispetto ad $x = -3$, cioé $f(-3+h) = f(-3-h)$: basta pertanto determinarne il grafico per $x \geq -3$

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+3)^2+1} \quad \to \quad f'(x) = \frac{1-(x+3)^2}{\left((x+3)^2+1\right)^2}$$

Da cui, limitatamente alla semiretta $x > -3$, $f'(x)$ é positiva in $(-3, -2)$ e negativa dopo: quindi $f(x)$ é crescente in $(-3, -2)$ e decrescente dopo.
Tenuto presente che

$$f(-3) = 0, \quad f(-2) = 1/2, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

si riconosce, vedi figura 1, che

$$minimo = 0 = f(-3), \quad massimo = f(-2) = \frac{1}{2}$$

Nel punto $x = -3$ la funzione non é derivabile.

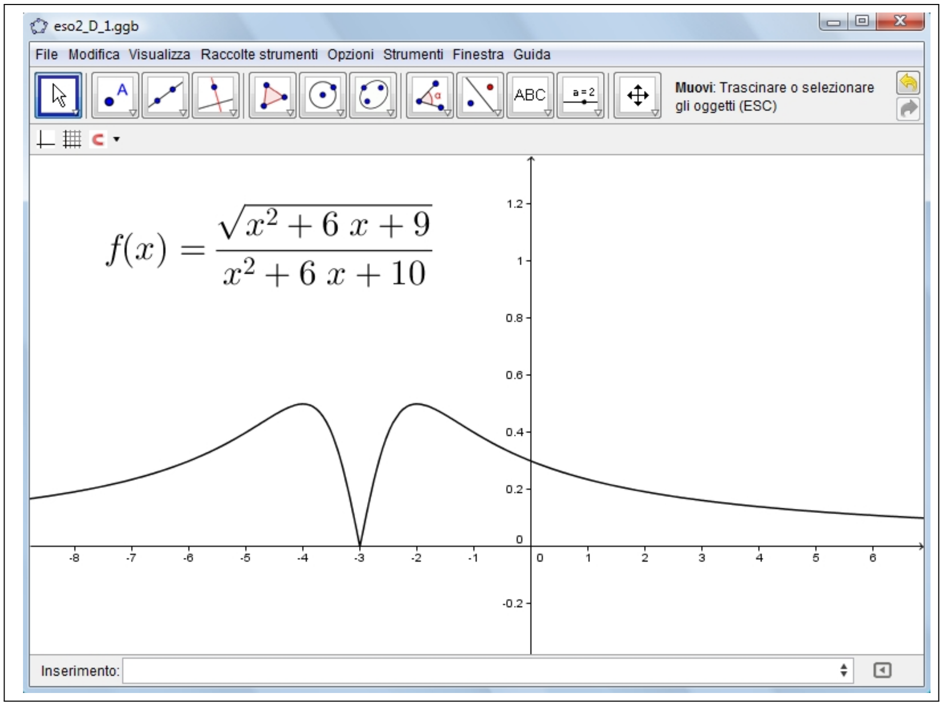

FIGURA 1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x^2+6x+10} = \dfrac{|x+3|}{|x+3|^2+1}$

Osservazione 2.1. *Che la funzione*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2kx+k^2}}{x^2+2kx+k^2+1} = \frac{|x+k|}{|x+k|^2+1}$$

abbia, qualunque sia $k \in \mathbb{R}$ minimo 0 e massimo $1/2$ era del resto ovvio:

$$2|a| \le a^2+1 \quad \to \quad \frac{|x+k|}{|x+k|^2+1} \le \frac{1}{2}$$

e quindi

$$f(-a) = 0 \le f(x) \le \frac{1}{2} = f(1-a)$$

2.2. Esercizio.

- *Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k+1}{k+1} x^k$ *é assolutamente convergente e per quali $x \in \mathbb{R}$ é convergente.*
- *Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie* $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (3-x)^k$ *é convergente e determinarne la somma.*

SOLUZIONE:

Dal criterio del rapporto segue che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k+1}{k+1} x^k$ é assolutamente convergente se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{3k+1}{k+1} x^k\right|}{\left|\frac{3(k-1)+1}{k} x^{k-1}\right|} = |x| < 1$$

Agli estremi $x = \pm 1$ la serie non é convergente perché il termine generale non riesce per tali valori infinitesimo.

La serie geometrica $\sum_{k=2}^{\infty} (3-x)^k$ é convergente per

$$|3-x| < 1 \quad \to \quad 2 < x < 4$$

La somma vale

$$S = (3-x)^2 \frac{1}{1-(3-x)} = \frac{(3-x)^2}{x-2}$$

2.3. Esercizio.

Assegnata la funzione $f(x) = \log(1+5x)$

- *calcolare i polinomi di Taylor* $T_1(x)$ *e* $T_2(x)$ *di punto iniziale* $x_0 = 0$ *e ordini* 1 *e* 2,
- *provare che riesce* $\forall x \geq 0 : \; T_2(x) \leq f(x) \leq T_1(x)$.

SOLUZIONE:

$$T_1(x) = 5x, \quad T_2(x) = 5x - \frac{25}{2} x^2$$

Per provare la disuguaglianza richiesta:

- $\log(1+5x) \leq 5x$ si ricava dal fatto che la $y = 5x$ é tangente al grafico in corrispondenza dell'origine e la funzione $\log(1+5x)$ é concava,
- posto $d(x) = \log(1+5x) - 5x + 25/2\, x^2$ é facile riconoscere che $d(0) = 0$ e che per $x \geq 0$ riesce $d'(x) \geq 0$, per cui

  $$\forall x \geq 0 : \; 0 = d(0) \leq d(x) \quad \to \quad T_2(x) \leq \log(1+5x)$$

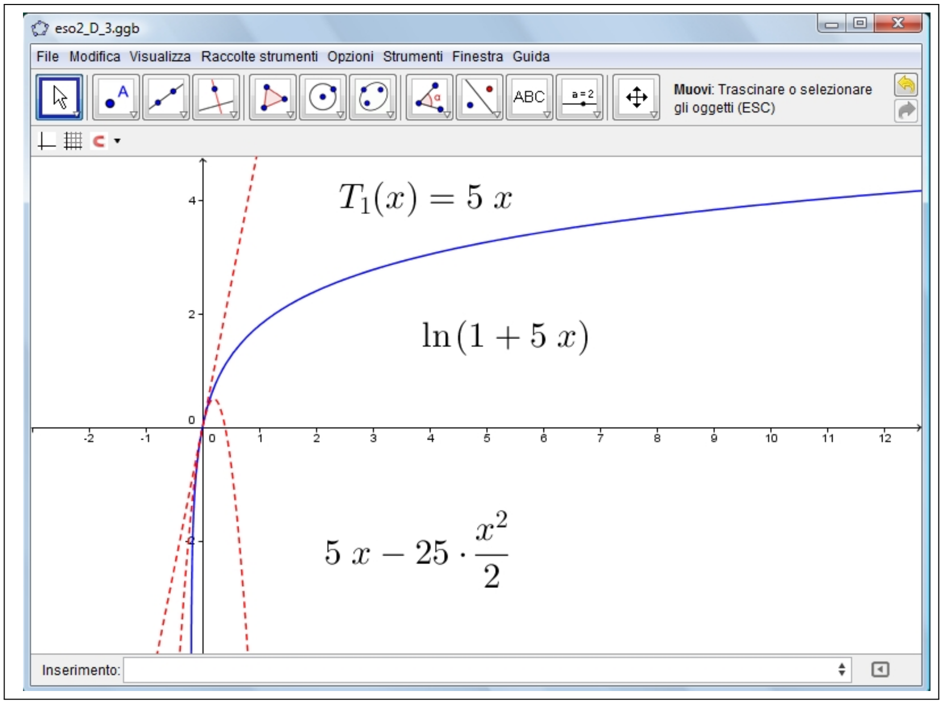

FIGURA 2. $f(x) = \log(1 + 5x)$

2.4. Esercizio.

Assegnata la funzione

$$f(x) = e^x + 16e^{-x} \quad x \in \mathbb{R}$$

- *determinare l'immagine $f(\mathbb{R})$ di f,*
- *determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = k$ non ha soluzioni, ha una soluzione, ha due soluzioni.*

SOLUZIONE:

L'immagine di f é un intervallo determinato dall'*inf* e dal *sup* di f:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \quad \to \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = +\infty$$

Per determinare il minimo

$$f'(x) = e^x - 16e^{-x} : \ f'(x) = 0 \quad \to \quad e^{2x} = 16 \quad \to \quad e^x = 4 \quad \to \quad x = \log(4)$$

Ne segue

$$minimo = f(\log(4)) = 8$$

L'immagine di f éd pertanto l'intervallo $[8, +\infty)$.

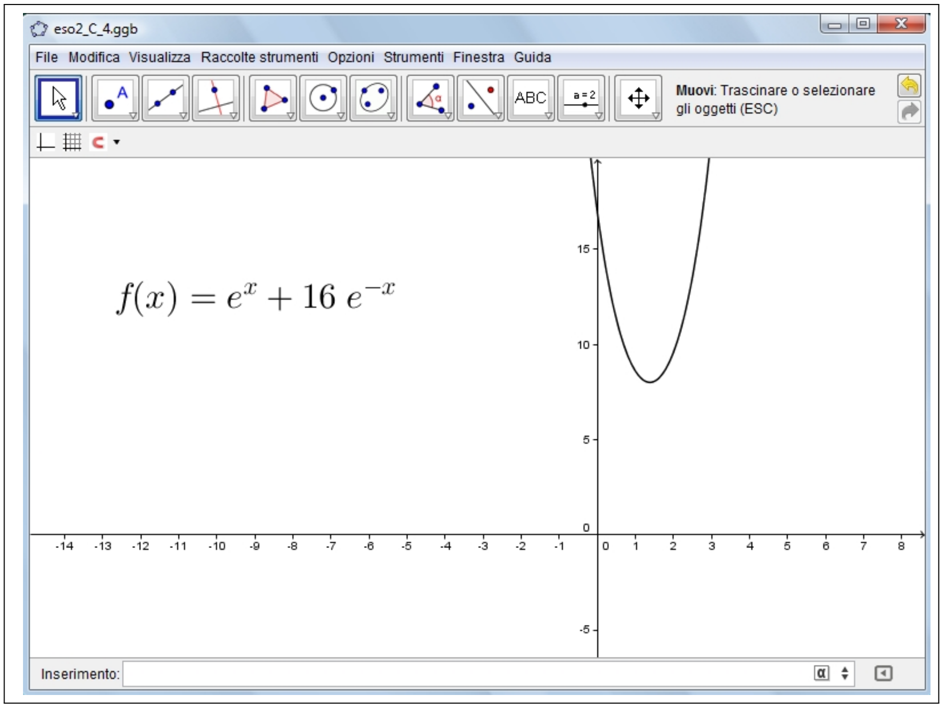

FIGURA 3. $f(x) = e^x + 16e^{-x} \quad x \in \mathbb{R}$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} x < \log(4) & \rightarrow & f'(x) < 0 & \rightarrow & f(x) \searrow \\ x > \log(4) & \rightarrow & f'(x) < 0 & \rightarrow & f(x) \nearrow \end{cases}$$

Pertanto l'equazione $f(x) = k$:

- non ha soluzioni se $k < 8$
- ha una sola soluzione se $k = 8$
- ha due soluzioni se $k > 8$.