

ANALISI  
*Foglio di esercizi*

7 ottobre 2011

**1.1. Esercizio.** Determinare esplicitamente gli insiemi  $A$  e  $B$

$$A := \{x \in \mathbb{R} : 3 - x^2 \geq 0\}, \quad B := \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 3| > 0\}$$

**1.2. Esercizio.** Determinare esplicitamente i seguenti insiemi:

$$A := \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| > 5\}, \quad B := \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| \leq 3\}$$

- riconoscere se sono insiemi limitati,
- determinare gli eventuali estremi inferiore e superiore,
- riconoscere se sono anche minimo e massimo.

**1.3. Esercizio.** Disegnare l'insieme  $\Omega$  definito dal seguente sistema di disuguaglianze

$$\Omega = \begin{cases} |x + 2| \leq 4 \\ x^2 - 5x > -4 \end{cases}$$

- riconoscere se é limitato,
- determinare gli eventuali estremi inferiore e superiore,
- riconoscere se sono anche minimo e massimo.

**1.4. Esercizio.** Assegnati  $a, b \in \mathbb{R}$  determinare l'insieme

$$E := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < |x - b|\}$$

- riconoscere se é limitato,
- determinare gli eventuali estremi inferiore e superiore,
- riconoscere se sono anche minimo e massimo.

**1.5. Esercizio.** Sia  $a \neq 0$  razionale e  $b$  irrazionale: provare che

- $a + b$  é irrazionale,
- $ab$  é irrazionale.

**1.6. Esercizio.** Provare che tra due numeri razionali cade necessariamente almeno un irrazionale.

**1.7. Esercizio.** Provare che

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$$

é irrazionale.

**1.8. Esercizio.** Provare che

$$\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$$

é irrazionale.

**1.9. Esercizio.** Indicati con

$$E_n = \bigcup_{k=0}^n \left( \frac{1}{2^k}, \frac{3}{2^{k+1}} \right), \quad n = 1, 2, 3, 4$$

- esaminare se gli  $E_n$  sono intervalli,
- indicare loro minoranti e loro maggioranti,
- determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore per ciascuno degli  $E_n$  indicati.

**1.10. Esercizio.** Indicato con  $E$  l'insieme dei numeri reali

$$x = r + s\sqrt{2}$$

al variare di  $r$  ed  $s$  nei razionali,

- esaminare se  $E$  contiene numeri razionali,
- verificare che il prodotto di due elementi  $x_1$  e  $x_2$  di  $E$  appartiene ancora ad  $E$ ,
- verificare che il quoziente di due elementi  $x_1$  e  $x_2$  di  $E$  appartiene ancora ad  $E$ .