ANALISI

Foglio di esercizi

28 ottobre 2011

4.1. Esercizio.
Siano α e β due numeri reali tali che la loro somma e la loro differenza siano razionali: provare che allora essi sono entrambi razionali.

4.2. Esercizio.

Sia $I = [2, +\infty)$

$$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$$

- Esaminare se f é limitata,
- Provare che f é invertibile,
- determinare l'inversa

4.3. Esercizio.
Sia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1$$

- determinare le espressioni di $f(x+1)$ e di $f(x)+1$
- determinare l'espressione della somma

$$\sum_{k=0}^{3} f(x+k)$$

- indicata con

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + f^2(x)}$$

  determinare

$$\inf g(x), \quad \sup g(x)$$

4.4. Esercizio.

Sia $I = [-2, 2]$ e sia $f : I \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 1$:
- disegnare il grafico di $|f(x)|$ e di $f(|x|)$,
- determinare l'immagine $f(I)$
- determinare l'inversa di f.

4.5. Esercizio.

Sia $\{a_1, a_2, \dots\}$ la successione definita ricorsivamente

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^n}$$

- determinare i primi cinque termini della successione,
- verificare se la successione é limitata,
- verificare se é convergente.

4.6. Esercizio.

Sia $\{r_1, r_2, \dots\}$ la successione

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- determinare i primi cinque termini della successione,
- verificare se la successione é monotona,
- verificare se é convergente.

4.7. Esercizio.

Assegnata la successione

$$a_n = (1-\lambda)^n + \lambda^n$$

- determinare per quali λ é limitata,
- determinare per quali λ é convergente,
- determinare per quali λ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

4.8. Esercizio.

Ammesso di conoscere la somma della serie armonica generalizzata

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- determinare la somma delle serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

- determinare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + k^2}{2^k k^2}$$

4.9. Esercizio.

Sia $\{a_1, a_2, \dots\}$ la successione assegnata in modo ricorsivo da

$$a_1 = A, \quad a_{n+1} = B + \frac{1}{2}\, a_n$$

- determinare i primi 5 termini,
- esaminare se la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k)$$

  sia convergente,
- determinare, al variare di A e di B il limite della successione assegnata.