ANALISI

Foglio di esercizi

4 novembre 2011

5.1. Esercizio.

Assegnata la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

- riconoscere la convergenza,
- esprimere gli addendi nella forma
$$\frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$$
- determinare la successione delle somme parziali, e quindi la somma della serie.

5.2. Esercizio.

Determinare le somme delle seguenti tre serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$$

riconoscendo in esse delle serie geometriche.

5.3. Esercizio.

Riconoscere per confronto con le serie armoniche generalizzate studiate la convergenza, o meno, delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$$

5.4. Esercizio.

Assegnata la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$$

- riconoscere con il criterio del rapporto la sua convergenza,
- dedurre, per confronto, minorazioni per la sua somma.

5.5. Esercizio.

Assegnata la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

- provare che é convergente,
- dedurre, per confronto, maggiorazioni per la sua somma.

5.6. Esercizio.

Tenuto conto delle seguenti proprietá della funzione $\sin(x)$

$$|\sin(x)| \leq |x|, \qquad |\sin(x)| \leq 1$$

esaminare per quali valori di x le seguenti serie, a termini di segno variabile, sono convergenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^3}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n(x)$$

5.7. Esercizio.

Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ é convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$$

5.8. Esercizio.
Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ ciascuna delle seguenti serie é convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n$$

5.9. Esercizio.
Assegnate le due funzioni

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \qquad g(x) = \frac{x^2+x}{3-x}$$

- calcolare i valori delle due funzioni in corrispondenza a $x = 1,\, 10,\, 100,\, 1000$
- determinare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

- detti ℓ_1 e ℓ_2 i due limiti determinare una soglia $\overline{x}$ tale che

$$\forall x \geq \overline{x} : \quad |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| \leq 1$$

5.10. Esercizio.

Assegnata la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

- calcolare i valori $f(x)$ per $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$
- valutare se esiste $\lim_{x \to 0} f(x)$
- valutare se esistono, sempre in $x_0 = 0$ il limite da sinistra e da destra.

5.11. Esercizio.

Sia

$$f(x) = \frac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$$

- determinare il grafico di $f(x)$,
- determinare $\lim_{x \to 0} f(x)$
- determinare i limiti $\lim_{x \to -\infty} f(x), \ \lim_{x \to +\infty} f(x)$