

ANALISI
Foglio di esercizi

16 dicembre 2011

10.1. Esercizio. Determinare le derivate delle seguenti funzioni

$$F(x) = \int_x^3 e^{-t^2} dt,$$

$$G(x) = \cos x \int_{-4}^x e^{-t^2} dt,$$

$$H(x) = \cos x \int_{-4}^{6x} e^{-t^2} dt$$

10.2. Esercizio. Sia data la funzione

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Tracciare un grafico qualitativo di $F(x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

10.3. Esercizio.

- Tracciare un grafico approssimativo di

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^2 + 1} dt, \quad x \in [-1, 1].$$

- Dimostrare che la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^2 + 3} dt + 1$$

è invertibile su tutto \mathbb{R} . Detta $G(x)$ la funzione inversa, calcolare $G'(1)$.

10.4. Esercizio. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_0^1 (4x^6 - 5x^3 + 3x + 1) dx, \quad \int_0^{\pi/4} \cos x dx,$$
$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx$$

10.5. Esercizio. Calcolare in valor medio di

$$f(x) = \cos x + e^{-x}$$

nell'intervallo $[-\pi/2, 0]$.

10.6. Esercizio. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

determinare

$$\int_{-3}^5 f(t) dt \quad \text{e} \quad F(x) = \int_{-3}^x f(t) dt$$

per $x \geq -3$.

10.7. Esercizio.

Utilizzando la formula di integrazione per parti, determinare i seguenti integrali indefiniti, cioè la totalità delle primitive,

$$\int x^2 \sin x dx, \quad \int x^3 (\log x)^2 dx, \quad \int x^3 e^x dx,$$

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x^3} dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx, \quad \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

10.8. Esercizio.

Utilizzando la formula di integrazione per sostituzione, determinare i seguenti integrali indefiniti, cioè la totalità delle primitive,

$$\int \cotg x dx; \quad \int e^{5-2x} dx; \quad \int \sqrt{3x+4} dx; \quad \int \sqrt{1-x^2} dx;$$

$$\int \frac{x dx}{(4x^2+1)^5}; \quad \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}; \quad \int \frac{\cos x}{4 + \sin x} dx;$$

$$\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx; \quad \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \log x} dx.$$

10.9. Esercizio.

Calcolare l'area della regione delimitata da

$$y = \frac{x}{x^2 + 16}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

10.10. Esercizio. Calcolare, al variare di $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx.$$