

Soluzione esercizi

7 ottobre 2011

1.1. Esercizio. *Determinare esplicitamente gli insiemi A e B*

$$A := \{x \in \mathbb{R} : 3 - x^2 \geq 0\}, \quad B := \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 3| > 0\}$$

SOLUZIONE:

$$3 - x^2 \geq 0$$

La disuguaglianza assegnata equivale a

$$3 \geq x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 \leq 3$$

e quindi a

$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad |x| \leq \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

ovvero $A = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.É anche utile osservare come per risolvere la disuguaglianza $3 - x^2 \geq 0$ si possa

- risolvere l'equazione $3 - x^2 = 0$, $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$
- decidere cosa accade dell'espressione $x^2 - 3$ nei tre intervalli

$$(-\infty, -\sqrt{3}), \quad [-\sqrt{3}, \sqrt{3}], \quad (\sqrt{3}, +\infty)$$

- si riconosce facilmente che nel primo e nel terzo intervallo riesce $3 - x^2 < 0$ mentre nel secondo riesce $3 - x^2 \geq 0$.

Una risposta si ottiene analogamente disegnando il grafico della funzione $y = 3 - x^2$, vedi Figura 1.

$$|x^2 - 3| > 0$$

Si ricordi che i valori espressi da moduli sono sempre, qualunque siano i parametri che vi figurano, numeri maggiori o uguali a zero.

Quindi per decidere le soluzioni della disuguaglianza $|x^2 - 3| > 0$ basta eliminare i valori di x per i quali riesce

$$|x^2 - 3| = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 3 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Riesce pertanto

$$B = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

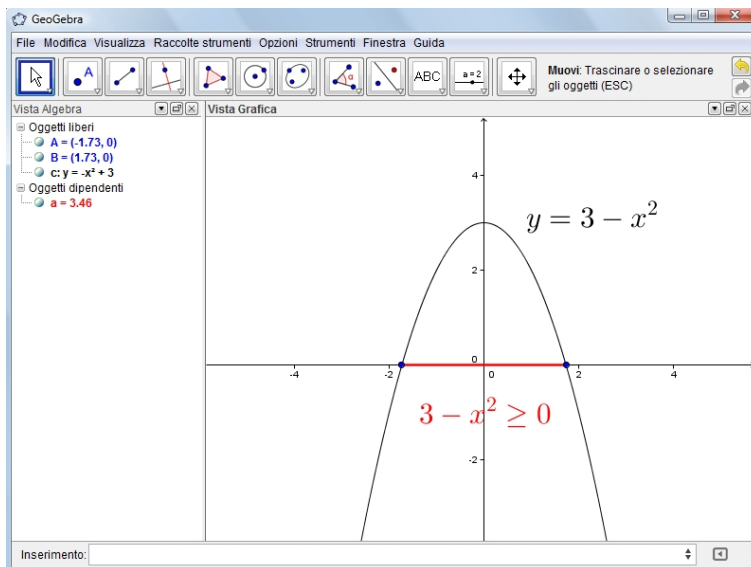


FIGURA 1. $A := \{x \in \mathbb{R} : 3 - x^2 \geq 0\}$

1.2. Esercizio. *Determinare esplicitamente i seguenti insiemi:*

$$A := \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| > 5\}, \quad B := \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| \leq 3\}$$

- riconoscere se sono insiemi limitati,
- determinare gli eventuali estremi inferiore e superiore,
- riconoscere se sono anche minimo e massimo.

SOLUZIONE:

$$A := \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| > 5\}$$

Il modulo $|x + 3| = |x - (-3)|$ rappresenta la distanza del punto x dal punto -3 : quindi

$$|x + 3| > 5$$

vuol dire

x distante da -3 per piú di 5

I punti che distano 5 da -3 sono: -8 a sinistra e 2 a destra.

Quindi i punti che distano da -3 per piú di 5 sono quelli dell'intervallo $(-\infty, -8)$ e dell'intervallo $(2, +\infty)$.

Si ha quindi

$$A = (-\infty, -8) \cup (2, +\infty)$$

L'insieme A

- é non limitato,
- non é limitato inferiormente quindi non ha estremo inferiore,

- non é limitato superiormente quindi non ha estremo superiore,
- non ha né minimo né massimo.

La frase *l'insieme A non é limitato inferiormente* viene tradizionalmente considerata equivalente alla seguente

l'insieme A ha estremo inferiore $-\infty$.

Analogamente la frase *l'insieme A non é limitato superiormente* viene tradizionalmente considerata equivalente alla seguente

l'insieme A ha estremo superiore $+\infty$.

La disuguaglianza $|x + 3| > 5$ é del resto equivalente alle due seguenti

$$\{(x + 3) < -5\} \cup \{(x + 3) > 5\} \rightarrow \{x < -8\} \cup \{x > 2\}$$

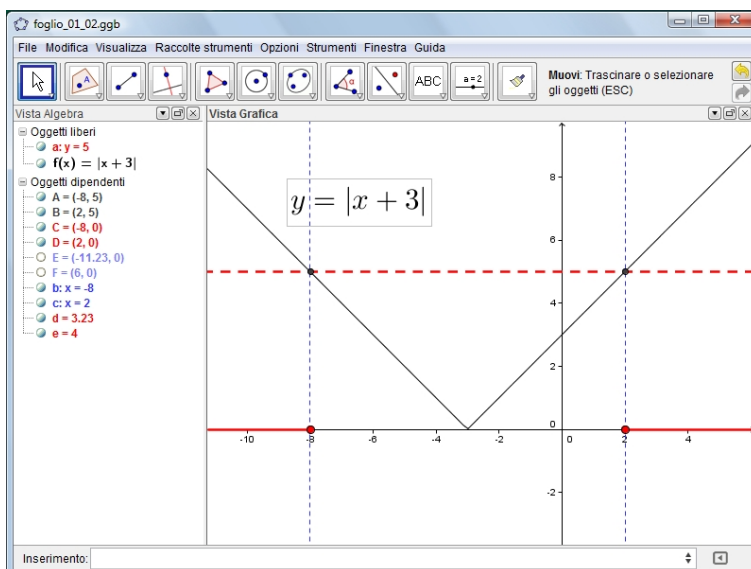


FIGURA 2. $A := \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| > 5\}$

La determinazione dell'insieme A puó essere ricavata dal grafico di $y = |x + 3|$ come da Figura 2.

$$B := \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| < 3\}$$

L'insieme B é costituito dai punti che

distano da -2 meno di 3.

Quindi

$$B := (-5, 1)$$

intervallo estremi esclusi.

L'insieme B é

- limitato,
- i suoi estremi inferiore e superiore sono rispettivamente -5 e 1 ,
- non ha né minimo né massimo.

1.3. Esercizio. Disegnare l'insieme Ω definito dal seguente sistema di disuguaglianze

$$\Omega = \begin{cases} |x + 2| \leq 4 \\ x^2 - 5x > -4 \end{cases}$$

- riconoscere se è limitato,
- determinare gli eventuali estremi inferiore e superiore,
- riconoscere se sono anche minimo e massimo.

SOLUZIONE:

Indicati con

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| \leq 4\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x > -4\}$$

riesce

$$\Omega = A \cap B$$

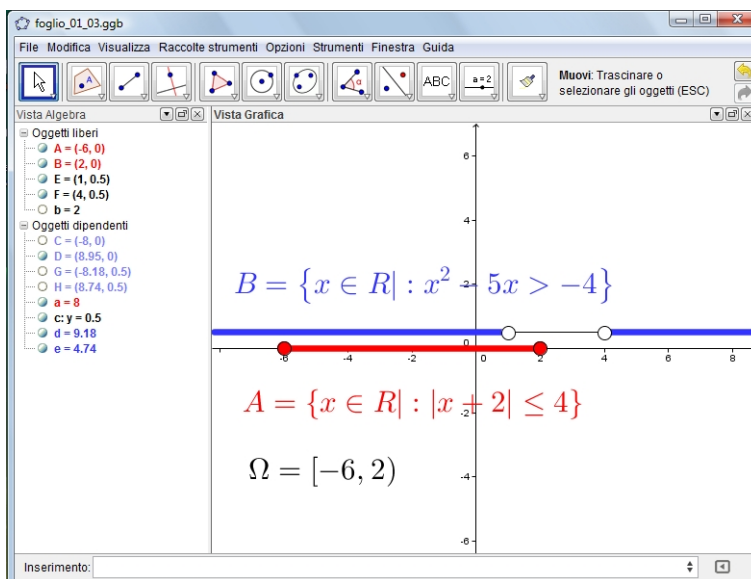


FIGURA 3. $\{|x + 2| \leq 4\} \cap \{x^2 - 5x > -4\}$

tenuto conto che

$$\begin{cases} |x + 2| \leq 4 \\ x^2 - 5x > -4 \end{cases} \begin{array}{l} \rightarrow -4 \leq x + 2 \leq 4 \\ \rightarrow (x - 1)(x - 4) > 0 \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow x \in [-6, 2] \\ \rightarrow x \notin [1, 4] \end{array}$$

$$A = [-6, 2], \quad B = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$$

riesce

$$\Omega = [-6, 2)$$

estremo sinistro incluso, destro escluso.

L'insieme Ω é:

- limitato,
- -6 é il suo estremo inferiore, e 2 il suo estremo superiore,
- il minimo é -6 , non esiste massimo.

1.4. Esercizio. *Assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ determinare l'insieme*

$$E := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < |x - b|\}$$

- *riconoscere se é limitato,*
- *determinare gli eventuali estremi inferiore e superiore,*
- *riconoscere se sono anche minimo e massimo.*

SOLUZIONE:

Considerato che $|x - a|$ rappresenta la distanza di x da a e $|x - b|$ rappresenta la distanza di x da b i punti che soddisfano la disuguaglianza

$$|x - a| < |x - b|$$

sono i punti

che distano da a meno di quanto distino da b

Indicato con

$$c = \frac{a + b}{2}$$

il punto medio tra a e b consideriamo le due semirette

$$(-\infty, c), \quad (c, +\infty)$$

L'insieme E é quella delle due semirette che contiene a :

- se $a < b$ l'insieme E é l'intervallo $(-\infty, c)$,
- se $b < a$ l'insieme E é l'intervallo $(c, +\infty)$.

L'insieme E é:

- non limitato,
- se $a < b$ non é limitato inferiormente ma é limitato superiormente,
- se $b < a$ é limitato inferiormente ma é limitato superiormente,
- non ha né minimo né massimo.

1.5. Esercizio. *Sia $a \neq 0$ razionale e b irrazionale: provare che*

- $a + b$ é irrazionale,
- ab é irrazionale.

SOLUZIONE:

Se, per assurdo, fosse

$$a + b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

riuscirebbe

$$b = \frac{p}{q} - a \in \mathbb{Q}$$

contrariamente all'ipotesi che b sia irrazionale.

Si é quindi riconosciuto che la somma $a + b$ di un razionale e di un irrazionale non può venire razionale.

Si osservi che, invece, la somma di due numeri entrambi irrazionali può risultare razionale: ad esempio

$$\{1 + \sqrt{2}\} + \{3 - \sqrt{2}\} = 4$$

Analogamente, se per assurdo, fosse

$$ab = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

riuscirebbe

$$b = \frac{1}{a} \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

contrariamente all'ipotesi che b sia irrazionale.

Si é quindi riconosciuto che il prodotto ab non può venire razionale.

Si osservi che, invece, il prodotto o il quoziente di due numeri entrambi irrazionali può risultare razionale: ad esempio

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

1.6. Esercizio. *Provare che tra due numeri razionali cade necessariamente almeno un irrazionale.*

SOLUZIONE:

Indichiamo con $a < b$ i due razionali assegnati e indichiamo con

$$d = b - a > 0$$

la loro differenza. Certamente d é razionale ed é diverso da $\sqrt{2}$ che, invece é irrazionale.

Se riesce

$$0 < \sqrt{2} < d$$

allora il numero $c = a + \sqrt{2}$ é irrazionale e cade tra a e b .
Se invece riesce

$$0 < d < \sqrt{2}$$

allora, per la proprietá archimedea esiste un intero n_0 tale che

$$\sqrt{2} < n_0 d \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{n_0} < d$$

allora il numero

$$c = a + \frac{\sqrt{2}}{n_0}$$

é irrazionale e cade tra a e b .

1.7. Esercizio. *Provare che*

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$$

é irrazionale.

SOLUZIONE:

Se per assurdo fosse

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

si avrebbe

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} - \sqrt{2}$$

elevando al cubo, membro a membro, si ha

$$2 = \left(\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right)^3 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\left(\frac{p}{q}\right)^2 \sqrt{2} + 3\left(\frac{p}{q}\right) (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3$$

da cui

$$2 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\left(\frac{p}{q}\right)^2 \sqrt{2} + 6\left(\frac{p}{q}\right) - 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = -\frac{2 - \left(\frac{p}{q}\right)^3 - 6\left(\frac{p}{q}\right)}{3\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2} \in \mathbb{Q}$$

relazione assurda stante il fatto che $\sqrt{2}$ é noto essere irrazionale.

1.8. Esercizio. *Provare che*

$$\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$$

é irrazionale.

SOLUZIONE:

Se per assurdo riuscisse

$$\sqrt{3} + \sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

ne seguirebbe

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} - \sqrt{3}$$

da cui, elevando al cubo membro a membro si avrebbe

$$2 = \left(\frac{p}{q} - \sqrt{3}\right)^3 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\left(\frac{p}{q}\right)^2\sqrt{3} + 3\left(\frac{p}{q}\right)(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3$$

da cui

$$2 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\left(\frac{p}{q}\right)^2\sqrt{3} + 9\left(\frac{p}{q}\right) - 3\sqrt{3}$$

da cui ancora si avrebbe

$$\sqrt{3} = -\frac{2 - \left(\frac{p}{q}\right)^3 - 9\left(\frac{p}{q}\right)}{3\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 3} \in \mathbb{Q}$$

relazione impossibile stante che é noto che $\sqrt{3}$ é irrazionale.

1.9. Esercizio. *Indicati con*

$$E_n = \bigcup_{k=0}^n \left(\frac{1}{2^k}, \frac{3}{2^{k+1}} \right), \quad n = 1, 2, 3, 4$$

- *esaminare se gli E_n sono intervalli,*
- *indicare loro minoranti e loro maggioranti,*
- *determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore per ciascuno degli E_n indicati.*

SOLUZIONE:

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(1, \frac{3}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) \\ E_2 &= \left(1, \frac{3}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8} \right) \\ E_3 &= \left(1, \frac{3}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8} \right) \cup \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{16} \right) \\ E_4 &= \dots \end{aligned}$$

- Gli E_1, E_2, \dots non sono intervalli: sono unioni di intervalli aperti disgiunti.
- Lo zero é un minorante di tutti gli E_n , $\frac{3}{2}$ é un loro maggiorante comune.
- $\frac{3}{2}$ é l'estremo superiore di tutti gli E_n , gli estremi inferiori sono diversi, riesce

$$\inf E_n = \frac{1}{2^n}$$

1.10. Esercizio. *Indicato con E l'insieme dei numeri reali*

$$x = r + s\sqrt{2}$$

al variare di r ed s nei razionali,

- *esaminare se E contiene numeri razionali,*
- *verificare che il prodotto di due elementi x_1 e x_2 di E appartiene ancora ad E ,*
- *verificare che il quoziente di due elementi x_1 e x_2 di E appartiene ancora ad E .*

SOLUZIONE:

- L'insieme E contiene tutto \mathbb{Q} : basta osservare gli elementi di E relativi alla scelta $s = 0$.

•

$$(r_1 + s_1\sqrt{2})(r_2 + s_2\sqrt{2}) = (r_1r_2 + 2s_1s_2) + (r_1s_2 + s_1r_2)\sqrt{2} \in E$$

•

$$\frac{r_1 + s_1\sqrt{2}}{r_2 + s_2\sqrt{2}} = \frac{(r_1 + s_1\sqrt{2})(r_2 - s_2\sqrt{2})}{(r_2 + s_2\sqrt{2})(r_2 - s_2\sqrt{2})} = \frac{(r_1 + s_1\sqrt{2})(r_2 - s_2\sqrt{2})}{r_2^2 - 2s_2^2} \in E$$

Il denominatore $r_2^2 - 2s_2^2$ potrebbe essere zero

$$2 = \left(\frac{r_2}{s_2}\right)^2$$

e delegittimare l'operazione ?

... no !

Sappiamo benissimo infatti
che 2 non é il quadrato di alcun razionale !