ANALISI

Soluzione esercizi

28 ottobre 2011

4.1. Esercizio.

Siano α e β due numeri reali tali che la loro somma e la loro differenza siano razionali: provare che allora essi sono entrambi razionali.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il teorema di Cramer sull'espressione delle soluzioni di un sistema

$$\begin{cases} ax + by = h \\ cx + dy = k \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{hd - kb}{ad - bc}, \\ y = \dfrac{ak - ch}{ad - bc} \end{cases}$$

implica che se i coefficienti e i termini noti sono razionali allora sono razionali anche le soluzioni.

Nel caso dell'esercizio i due numeri α e β soddisfano il seguente sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = h \\ \alpha - \beta = k \end{cases} \quad h, k \in \mathbb{Q}$$

Quindi, per quanto osservato sopra α e β sono razionali.

4.2. Esercizio.

Sia $I = [2, +\infty)$

$$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$$

- Esaminare se f é limitata,
- Provare che f é invertibile,
- determinare l'inversa

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione $x^2 - 4x + 3$ non é limitata nell'intervallo assegnato, quindi non sará limitata neanche la $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$

Per riconoscere che f sia invertibile basta riconoscere che sia strettamente monotona:

- $x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x - 2)^2 - 1$
- $(x - 2)^2$ é crescente,
- quindi é crescente anche $(x - 2)^2 - 1$

quindi é strettamente monotona anche $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$.
Per determinare l'inversa occorre determinare l'espressione della soluzione dell'equazione

$$\sqrt[3]{x^2 - 4x + 3} = y \quad \to \quad x^2 - 4x + 3 = y^3, \quad y \in [-1, +\infty)$$

nell'incognita $x \in [2, +\infty)$ La formula risolutiva delle equazioni di secondo grado produce

$$x = 2 \pm \sqrt{1 - y^3}$$

solo la scelta della radice

$$x = 2 + \sqrt{1 - y^3}$$

produce valori $x \in [2, +\infty)$, quindi

$$f^{-1} : [1, +\infty) \quad \to \quad [2, +\infty), \quad f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{1 - y^3}$$

4.3. Esercizio.

Sia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1$$

- determinare le espressioni di $f(x + 1)$ e di $f(x) + 1$
- determinare l'espressione della somma

$$\sum_{k=0}^{3} f(x + k)$$

- indicata con

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + f^2(x)}$$

  determinare

$$\inf g(x), \quad \sup g(x)$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\begin{cases} f(x) & = x^2 - 1 \\ f(x+1) & = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x \\ f(x) + 1 & = x^2 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{3} f(x + k) = f(x) + f(x + 1) + f(x + 2) + f(x + 3) = 4x^2 + 12x + 4$$

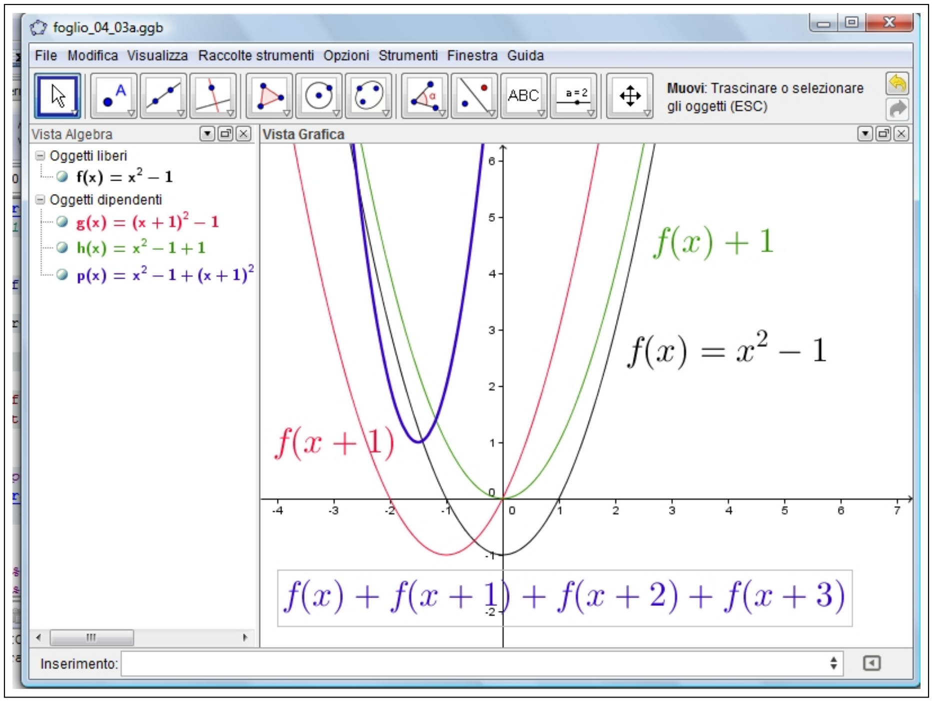

FIGURA 1. $x^2 - 1$, ecc.

Ricerca degli estremi di

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 2x^2 + 2}$$

Tenuto conto che

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : 2ab \le a^2 + b^2 \quad \to \quad g(x) = \frac{f(x)}{1 + f^2(x)} \in [-1/2, 12]$$

si ha

$$g(0) = -\frac{1}{2} \quad \to \quad \inf g(x) = \min g(x) = -\frac{1}{2} = g(0)$$

$$g(\pm\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \quad \to \quad \sup g(x) = \max g(x) = \frac{1}{2} = g(\pm\sqrt{2})$$

4.4. Esercizio.

Sia $I = [-2, 2]$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 1$:

- disegnare il grafico di $|f(x)|$ e di $f(|x|)$,
- determinare l'immagine $f(I)$
- determinare l'inversa di f.

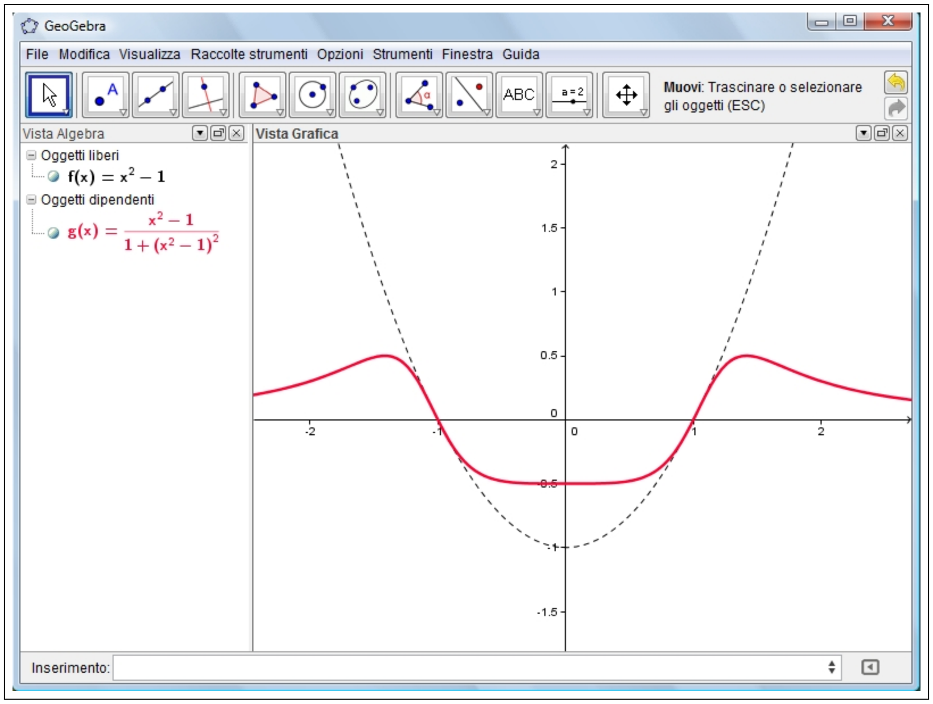

FIGURA 2. $g(x)$ ecc.

SOLUZIONE:

Tenuto presente che $f(x)$ é crescente l'immagine sará[1] l'intervallo $[f(-2), f(2)]$
L'inversa dipende dalla risoluzione dell'equazione nell'incognita x

$$f(x) = y \quad \rightarrow \quad x^3 - 1 = y \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{y+1}$$

4.5. Esercizio.

Sia $\{a_1, a_2, \dots\}$ la successione definita ricorsivamente

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^n}$$

- determinare i primi cinque termini della successione,
- verificare se la successione é limitata,
- verificare se é convergente.

SOLUZIONE:

[1]Non abbiamo ancora strumenti che giustificano tale verosimile affermazione.

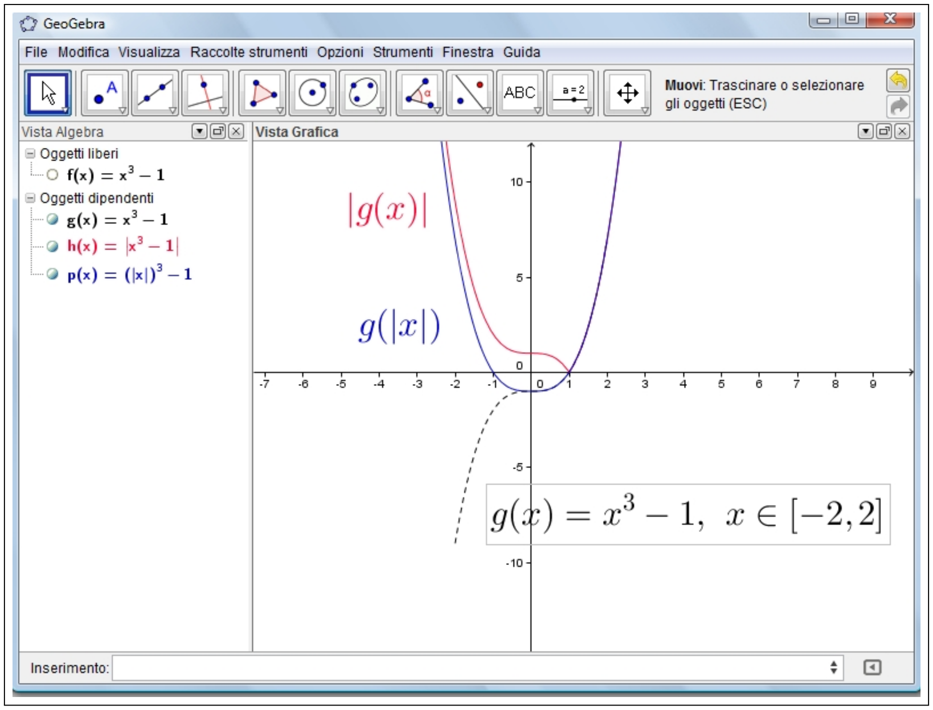

FIGURA 3. $f(x) = x^3 - 1$, $x \in [-2, 2]$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1, \\
a_2 &= 1 + \frac{1}{2} &&= \frac{3}{2} \\
a_3 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{4} &&= \frac{7}{4} \\
a_4 &= \frac{7}{4} + \frac{1}{8} &&= \frac{15}{8} \\
a_5 &= \frac{15}{8} + \frac{1}{16} &&= \frac{31}{16}
\end{aligned}
$$

É evidente che la successione proposta é la successione delle somme parziali della serie geometrica di ragione $1/2$. Tenuto conto che tale serie é convergente allora la successione delle sue somme parziali, cioé i termini della successione assegnata costituiscono un insieme limitato.

É noto che la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

ha somma

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} 2$$

pertanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

4.6. Esercizio.

Sia $\{r_1, r_2, \dots\}$ la successione

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- determinare i primi cinque termini della successione,
- verificare se la successione é monotona,
- verificare se é convergente.

Soluzione:

La serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

é convergente.
Quindi, per confronto, sono convergenti anche tutte le serie

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La successione

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

é pertanto

- ben definita,
- non negativa,
- monotona decrescente.

Quindi é una successione convergente.

4.7. Esercizio.

Assegnata la successione

$$a_n = (1-\lambda)^n + \lambda^n$$

- determinare per quali λ é limitata,
- determinare per quali λ é convergente,
- determinare per quali λ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

SOLUZIONE:

La successione é limitata se sono limitate entrambe le

$$(1-\lambda)^n, \quad \lambda^n$$

cosa che accade se

$$\begin{cases} |1-\lambda| \leq 1 \\ |\lambda| \leq 1 \end{cases} \quad \to \quad \lambda \in [0,1]$$

In tale intervallo estremi inclusi é anche convergente.
Affinché la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sia convergente occorre invece che $\lambda \in (0,1)$: agli estremi infatti i termini a_n non sono infinitesimi.

4.8. Esercizio.

Ammesso di conoscere la somma della serie armonica generalizzata

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- determinare la somma delle serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

- determinare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + k^2}{2^k k^2}$$

SOLUZIONE:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + k^2}{2^k k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\pi^2}{6} + 1$$

4.9. Esercizio.

Sia $\{a_1, a_2, \dots\}$ la successione assegnata in modo ricorsivo da

$$a_1 = A, \quad a_{n+1} = B + \frac{1}{2} a_n$$

- determinare i primi 5 termini,
- esaminare se la serie
  $$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k)$$
  sia convergente,
- determinare, al variare di A e di B il limite della successione assegnata.

SOLUZIONE:

$$\begin{aligned}
a_1 = &\ A \\
a_2 = &\ B + \tfrac{1}{2}a_1 = \ B + \tfrac{1}{2}A \\
a_3 = &\ B + \tfrac{1}{2}a_2 = \ B + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{4}A \\
a_4 = &\ B + \tfrac{1}{2}a_3 = \ B + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{4}B + \tfrac{1}{8}A \\
a_5 = &\ B + \tfrac{1}{2}a_4 = \ B + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{4}B + \tfrac{1}{8}B + \tfrac{1}{16}A
\end{aligned}$$

Le relazioni

$$\begin{cases} a_{n+1} & = B + \frac{1}{2}a_n \\ a_n & = B + \frac{1}{2}a_{n-1} \end{cases}$$

implicano sottraendo membro a membro

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) \quad \to \quad a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_2 - a_1)$$

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(B - \frac{1}{2}A\right)$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_{k+1} - a_k|)$ é quindi assolutamente convergente, per confronto con la serie geometrica.
Pertanto la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1} - a_k)$$

é convergente.
Pertanto é convergente anche la successione $\{a_n\}$: detto ℓ il suo limite dalla

$$a_{n+1} = B + \frac{1}{2}a_n$$

discende

$$\ell = B + \frac{1}{2}\ell \quad \to \quad \ell = 2B$$