ANALISI

Soluzione esercizi

21 dicembre 2011

10.1. Esercizio. *Determinare le derivate delle seguenti funzioni*

$$F(x) = \int_x^3 e^{-t^2} dt,$$

$$G(x) = \cos x \int_{-4}^x e^{-t^2} dt,$$

$$H(x) = \cos x \int_{-4}^{6x} e^{-t^2} dt$$

Osservazione 10.1. *Il teorema fondamentale del calcolo riconosce che, per ogni $f(t)$ integrabile e continua in $[a, b]$ riesce*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \quad \to \quad \forall x \in [a, b] : \; F'(x) = f(x)$$

Sottoprodotti di tale fondamentale relazione sono i seguenti:

- *dalla regola di derivazione delle funzioni composte, per ogni $g \in C^1$ a valori in $[a, b]$*

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\, dt \quad \to \quad \forall x \in [a, b] : \; F'(x) = f[g(x)]\, g'(x)$$

- *tenuto conto dell'accezione $\displaystyle\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$ si ha*

$$F(x) = \int_x^a f(t)dt \quad \to \qquad \to \quad \forall x \in [a, b] : \; F'(x) = -f(x)$$

- *ancora dalla regola di derivazione delle funzioni composte, per ogni $\alpha, \beta \in C^1$ a valori in $[a, b]$*

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt \quad \to \quad \forall x \in [a, b] : \; F'(x) = f[\beta(x)]\beta'(x) - f[\alpha(x)]\alpha'(x)$$

Esempio 10.2. *Sia*

$$F(x) = \int_{3x}^{7x} t^2 dt \quad \to \quad F(x) = \frac{1}{3}\left\{7^3 x^3 - 3^3 x^3\right\} = \frac{316}{3} x^3$$

da cui, ovviamente $F'(x) = 316x^2$.

Calcolando la derivata con le regole precedenti si ha

$$F'(x) = 7(7x)^2 - 3(3x)^2 = 316x^2$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Pertanto

$$F(x) = \int_x^3 e^{-t^2} dt \quad \to \quad F'(x) = e^{-x^2}$$

$$G(x) = \cos x \int_{-4}^x e^{-t^2} dt \quad \to \quad G'(x) = -\sin(x) \int_{-4}^x e^{-t^2} dt + \cos(x) e^{-x^2}$$

avendo tenuto conto che la derivata di un prodotto genera due addendi.

$$H(x) = \cos x \int_{-4}^{6x} e^{-t^2} dt \quad \to \quad H'(x) = -\sin(x) \int_{-4}^{6x} e^{-t^2} dt + \cos(x) 6 e^{-36x^2}$$

10.2. Esercizio. *Sia data la funzione*

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Tracciare un grafico qualitativo di $F(x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$F(x) = \begin{cases} -\int_x^0 e^{-t^2}\, dt & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \int_0^x e^{-t^2}\, dt & x > 0 \end{cases} \quad \to \quad F'(x) = \begin{cases} e^{-x^2} > 0 & x < 0 \quad \nearrow \\ 1 & x = 0 \\ e^{-x^2} > 0 & x > 0 \quad \nearrow \end{cases}$$

$F(x)$ é funzione dispari: $F(-x) = -F(x)$.
Tenuto conto che per ogni x riesce

$$F''(x) = -2xe^{-x^2}$$

si riconosce, vedi figura 1, un grafico

- di una funzione crescente,
- grafico simmetrico rispetto all'origine,
- convesso per $x \in [-1, 0]$, concavo per $x \in [0, 1]$.

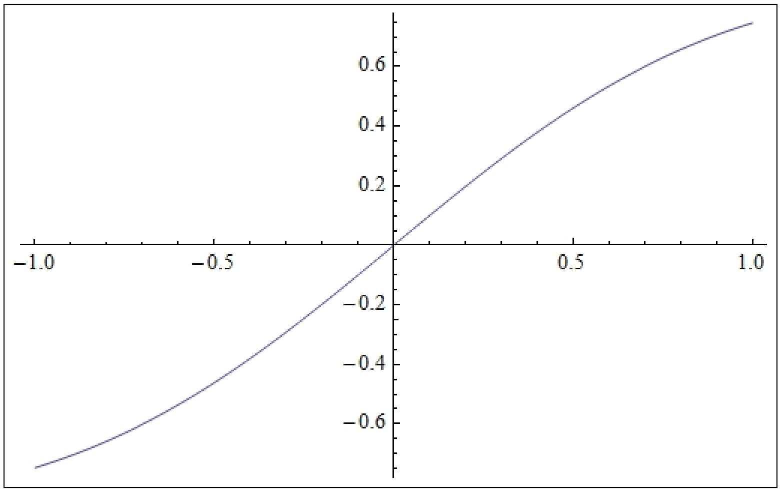

FIGURA 1. $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, $x \in [-1, 1]$

10.3. Esercizio.

- *Tracciare un grafico approssimativo di*
$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^2+1}\,dt, \quad x \in [-1, 1].$$
- *Dimostrare che la funzione*
$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{t}}{t^2+3}\,dt \,+\, 1$$
è invertibile su tutto $\mathbb{R}$. Detta $G(x)$ la funzione inversa, calcolare $G'(1)$.

SOLUZIONE:

Prima $F(x)$

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^2+1}\,dt, \quad \rightarrow \quad \begin{cases} F(0) = 0 \\ F'(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2+1} > 0 \quad \rightarrow \quad F(x) \nearrow \\ \\ x < 0 \quad \rightarrow \quad F(x) < 0 \\ x > 0 \quad \rightarrow \quad F(x) > 0 \end{cases}$$

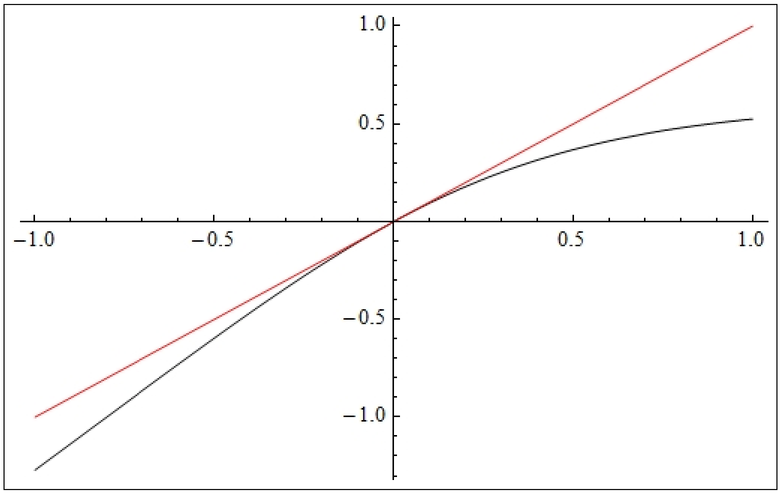

FIGURA 2. $F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^2+1}\,dt, \quad x \in [-1, 1]$.

$$F'(x) = F'(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1} \quad \to \quad F''(x) = -\frac{e^{-x}(x+1)^2}{(1+x^2)^2} < 0$$

La linea del grafico, vedi figura 2, pertanto:

- passa per l'origine,
- in tale punto ha tangente $y = x$
- é crescente,
- é concava.

$\boxed{\text{Seconda } F(x)}$

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^2+3}\,dt + 1 \quad \to \quad F'(x) = \frac{e^x}{x^2+3} > 0 \quad \to \quad F(x) \nearrow$$

$F(x)$ é strettamente crescente.
L'immagine di F é tutto $\mathbb{R}$: infatti

- F é definita in tutto $\mathbb{R}$ ed é continua, quindi l'immagine deve essere un intervallo,
- tenuto conto che $F(0) = 1$ e che

$$\forall t > 0 : \quad \frac{e^t}{3+t^2} \geq \frac{1/2 + t^2/2}{3+3t^2} \geq \frac{1}{6} \quad \to \quad \forall x > 0 : \quad F(x) \geq \frac{1}{6}x + 1$$

  e quindi $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$
- si riconosce che l'immagine di F sará una semiretta contenente il valore 1 e superiormente illimitata.

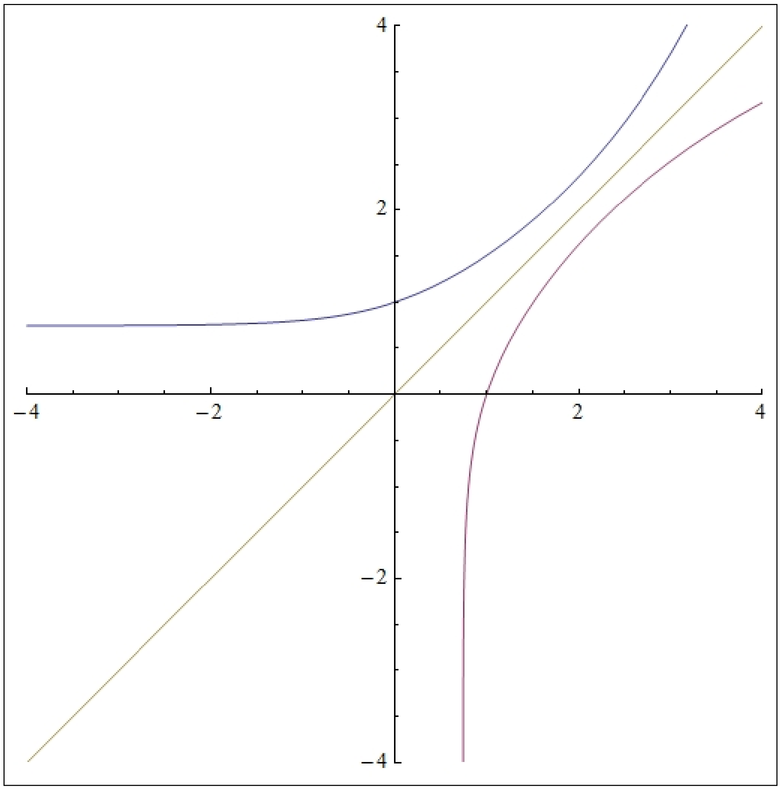

FIGURA 3. $F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^2+3}\,dt + 1$ e l'inversa.

F é strettamente crescente, quindi é invertibile in tutta la semiretta immagine.
Detta G la sua inversa riesce

$$G'(y_0) = \frac{1}{F'[G(y_0)]} = \frac{1}{\dfrac{e^{G(y_0)}}{G^2(y_0)+3}}$$

Ricordato che $F(0) = 1$ si riconosce che $G(1) = 0$ e pertanto

$$G'(1) = \frac{G^2(1)+3}{e^{G(1)}} = 3$$

In figura 3 sono disegnati i grafici della F, in alto, e della sua inversa G in basso: si noti come $G(1) = 0$ e come l'inclinazione in tale punto concordi con il valore $G'(1) = 3$.

10.4. Esercizio. *Calcolare i seguenti integrali definiti:*

$$\int_0^1 (4x^6 - 5x^3 + 3x + 1)dx, \qquad \int_0^{\pi/4} \cos x\, dx,$$

$$\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (4x^6-5x^3+3x+1)dx &= \frac{4}{7}x^7-\frac{5}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+x\Big|_0^1 &&= \frac{51}{28}\\
\int_0^{\pi/4}\cos x\,dx &= \sin(x)|_0^{\pi/4} &&= \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx &= -\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2} &&= \frac{7}{8}
\end{aligned}$$

10.5. Esercizio. *Calcolare in valor medio di*

$$f(x)=\cos x+e^{-x}$$

nell'intervallo $[-\pi/2,0]$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il valor medio di una funzione si riferisce al valore $f(\xi)$ di essa che interviene nel teorema della media integrale

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

Pertanto

$$\int_{-\pi/2}^{0}\left\{\cos(x)+e^{-x}\right\}\,dx=e^{\pi/2}=\left\{\cos(\xi)+e^{-\xi}\right\}\frac{\pi}{2}$$

Il valor medio é pertanto

$$\cos(\xi)+e^{-\xi}=\frac{2}{\pi}e^{\pi/2}\approx 3.06245$$

Non é ovvio riconoscere quale sia il punto ξ in cui tale valore viene assunto: tenuto conto tuttavia che agli estremi dell'intervallo $[-\pi/2,0]$ riesce

$$\begin{aligned}
&\cos(-\pi/2)+e^{\pi/2}=e^{\pi/2}\approx 4.81048\\
&\cos(0)+e^0=2
\end{aligned}$$

si riconosce che valori ξ in cui la funzione integranda valga 3.06245 ce ne sono certamente.

Tenuto conto inoltre che la funzione é nell'intervallo $[-\pi/2, 0]$ strettamente decrescente si riconosce che di tali valori ξ ne esiste solo uno.

10.6. Esercizio. *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 2\,x & x < 0 \end{cases}$$

determinare

$$\int_{-3}^{5} f(t)\,dt \qquad e \qquad F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt$$

per $x \geq -3$.

SOLUZIONE:

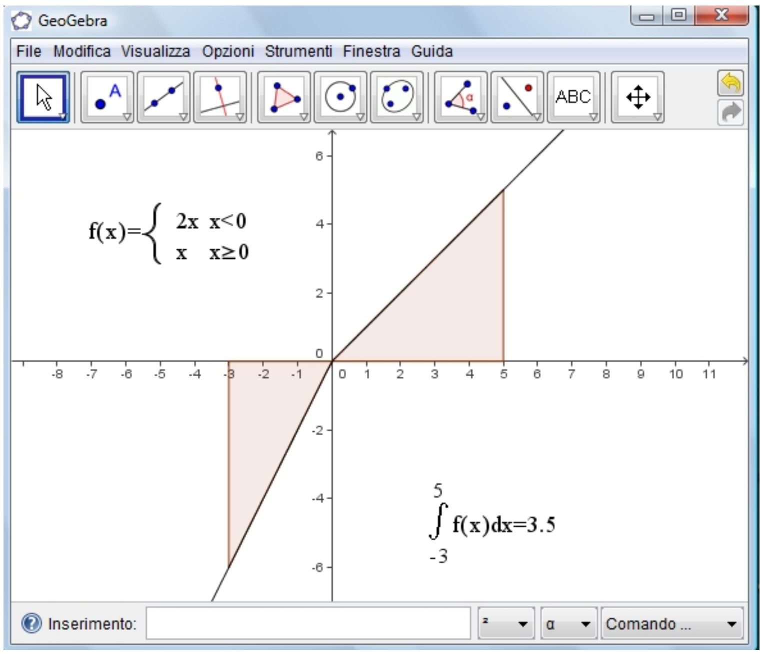

FIGURA 4. $\int_{-3}^{5} f(t)\,dt$

$$\int_{-3}^{5} f(t)dt = \int_{-3}^{0} 2tdt + \int_{0}^{5} tdt = -9 + \frac{25}{2}$$

$$F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)dt = \begin{cases} x^2 - 9 & se \quad x \leq 0 \\ -9 + \dfrac{x^2}{2} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

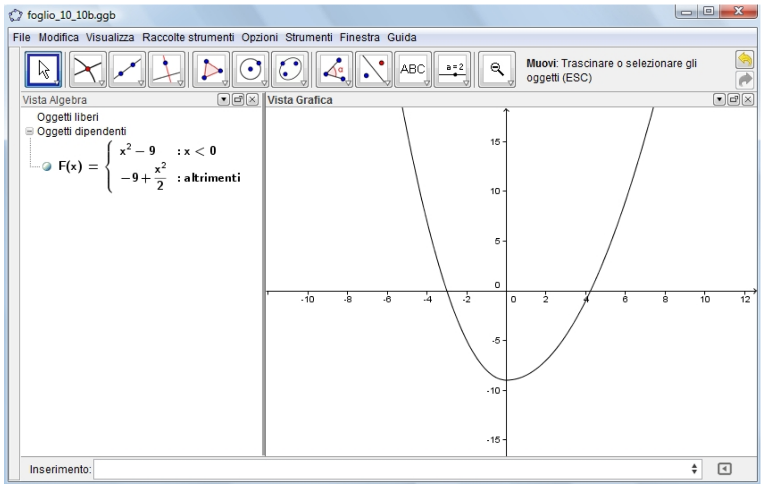

FIGURA 5. $F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt$

10.7. Esercizio.
Utilizzando la formula di integrazione per parti, determinare i seguenti integrali indefiniti, cioé la totalitá delle primitive,

$$\int x^2 \sin x\,dx, \quad \int x^3 (\log x)^2\,dx, \quad \int x^3 e^x\,dx,$$

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x^3}\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx \quad \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$$

SOLUZIONE:

Osservazione 10.3. *La notazione dell'integrale senza precisare gli estremi*

$$\int f(x)dx$$

indica, tradizionalmente, la famiglia delle funzioni $F(x)$ primitive di $f(x)$, famiglia che coincide, se si lavora su un intervallo, con

$$F_0(x) + c$$

essendo $F_0(x)$ una qualsiasi primitiva e c una qualsiasi costante.
Con tale notazione la regola di integrazione per parti diventa

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

con il significato insiemistico seguente

$\{Primitive\ di\ f'(x)g(x)\} = \{f(x)g(x) + c\} + \{Primitive\ di\ f(x)g'(x)\}$

$$\boxed{\int x^2 \sin x \, dx}$$

$$\int x^2 \sin(x) = -x^2 \cos(x) + \int 2x \cos(x) =$$

$$-x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) - \int 2 \sin(x) = -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x)$$

$$\boxed{\int x^3 (\log x)^2 \, dx}$$

$$\int x^3 (\log x)^2 \, dx = \frac{1}{4} x^4 \log^2(x) - \frac{1}{2} \int x^3 \log(x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \log^2(x) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} x^4 \log(x) - \frac{1}{4} \int x^3 dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \log^2(x) - \frac{1}{8} x^4 \log(x) + \frac{1}{32} x^4$$

$$\boxed{\int x^3 e^x \, dx,}$$

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6 \int e^x dx =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x = e^x \left\{ x^3 - 3x^2 + 6x - 6 \right\}$$

$$\boxed{\int_1^2 \frac{\log x}{x^3} \, dx}$$

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2}\log(x)\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}dx =$$
$$= -\frac{1}{8}\log(2) + \frac{1}{2}\log(2) = \frac{3}{8}\log(2)$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \int_0^{\pi} \cos(x)\left(1-\sin^2(x)\right)dx =$$
$$= \left[\sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx}$$

$$\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\,dx = \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin(x))\,dx =$$
$$= 2\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = 4$$

10.8. Esercizio.
Utilizzando la formula di integrazione per sostituzione, determinare i seguenti integrali indefiniti, cioé la totalitá delle primitive,

$$\int \text{cotg} x\,dx; \quad \int e^{5-2x}\,dx; \quad \int \sqrt{3x+4}\,dx; \quad \int \sqrt{1-x^2}\,dx;$$
$$\int \frac{x\,dx}{(4x^2+1)^5}; \quad \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx; \quad \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}; \quad \int \frac{\cos x}{4+\sin x}\,dx;$$
$$\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx; \quad \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\log x}\,dx.$$

Soluzione:

$$\int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \log(|\sin(x)|)$$

$$\int e^{5-2x}\, dx = -\frac{1}{2}\int e^{5-2x}\,(-2)dx = -\frac{1}{2}e^{5-2x}$$

$$\int \sqrt{3x+4}\, dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{3x+4}\,(3)dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+4)^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{9}(3x+4)\sqrt{3x+4}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$2\int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)$$

$$\int \frac{x\, dx}{(4x^2+1)^5} = \frac{1}{8}\int (4x^2+1)^{-5} 8x dx = -\frac{1}{8}\frac{1}{4}(4x^2+1)^{-4}$$

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int \sin\sqrt{x}\,(\sqrt{x})' dx = -2\cos(\sqrt{x})$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \arctan(e^x)$$

$$\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \quad (1+x^2 = t^2) \quad \rightarrow \quad \int (1-t^2) dt = t - \frac{1}{3}t^3 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}(2-x^2)$$

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\,\log(x)}\,dx = \int_e^{e^2} \log\left(|\log(x)|\right) = \log(2)$$

10.9. Esercizio.
Calcolare l'area della regione delimitata da

$$y = \frac{x}{x^2+16}, \qquad y = 0, \qquad x = 0, \qquad x = 2.$$

Soluzione:

$$Area = \int_0^2 \frac{x}{x^2+16}dx = \frac{1}{2}\log\left(x^2+16\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{5}{4}\right)$$

10.10. Esercizio. *Calcolare, al variare di $n, m \in \mathbb{N}$,*

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\cos(m\,x)\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\sin(m\,x)\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\sin(m\,x)\,dx.$$

Soluzione:

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\cos(m\,x)\,dx}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\cos(m\,x)\,dx = \frac{1}{m}\,\cos(n\,x)\sin(m\,x)\Big|_0^{2\pi} + \frac{n}{m}\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\sin(m\,x)\,dx \\[2ex] \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\cos(m\,x)\,dx = \frac{1}{n}\,\cos(m\,x)\sin(n\,x)\Big|_0^{2\pi} + \frac{m}{n}\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\sin(m\,x)\,dx \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\cos(m\,x)\,dx = \frac{n}{m}\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\sin(m\,x)\,dx \\[2ex] \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\cos(m\,x)\,dx = \frac{m}{n}\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\sin(m\,x)\,dx \end{cases}$$

Ne segue se $m \neq n$

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\cos(m\,x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\sin(m\,x)\,dx = 0$$

Se invece $n = m$, tenuto presente che

$$\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1 \quad \rightarrow \quad \int_0^{2\pi} \left\{\sin^2(nx) + \cos^2(nx)\right\} dx = 2\pi$$

ne segue

$$(2) \qquad \forall n \in \mathbb{N} : \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx = \pi$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\sin(m\,x)\,dx}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\sin(m\,x)\,dx = \frac{1}{n}\sin(nx)\sin(mx) - \frac{m}{n}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx \\[2ex] \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\sin(m\,x)\,dx = -\frac{1}{m}\cos(nx)\cos(mx) - \frac{n}{m}\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\sin(m\,x)\,dx = -\frac{m}{n}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx \\[2ex] \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\sin(m\,x)\,dx = -\frac{n}{m}\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx \end{cases}$$

che implica, qualunque siano $n,\, m\, \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\sin(m\,x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = 0$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\sin(m\,x)\,dx}$$

La risposta é inclusa nelle precedenti (1) e (2).

Osservazione 10.4. *Pensando alle funzioni*

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin(nx), \quad v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(nx), \quad n, m \in \mathbb{N}$$

come vettori di un ipotetico spazio vettoriale, e assumendo l'integrale del loro prodotto come loro prodotto scalare, si ha l'esempio di uno spazio di dimensione infinita, nel quale i vettori $\{u_n(x),\, v_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *costituiscono una base ortonormale*

- *il prodotto scalare di due elementi diversi é zero (cioé i due elementi sono ortogonali)*
- *il prodotto di un elemento per se stesso vale* 1*, (cioé si tratta di vettori di modulo* 1*).*