ANALISI

# *Soluzione esercizi*

**13 gennaio 2012**

**11.1. Esercizio.** *Dato il numero complesso* $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$*,*

- *calcolare* $|z|$, $\bar{z}$*,*
- *scrivere la rappresentazione trigonometrica di* $z$*,*
- *calcolare* $z^8$*.*

SOLUZIONE:

$$\overline{z} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2, \qquad \arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

$$z^8 = |z|^{128}\left\{\cos\left(8\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\frac{\pi}{4}\right)\right\} =$$
$$= 2^8\left\{\cos\left(2\pi\right) + i\sin\left(2\pi\right)\right\} = 2^8 = 256$$

**11.2. Esercizio.** *Determinare modulo e argomento del numero complesso*

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

*Determinare parte reale e parte immaginaria di* $z^{128}$*.*

SOLUZIONE:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1, \quad \arg(z) = -\frac{\pi}{6}$$

$$z^{128} = |z|^{128}\left\{\cos\left(128\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(128\frac{\pi}{6}\right)\right\} =$$
$$= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**11.3. Esercizio.** *Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:*

$$\begin{array}{lll} y'(t) = 5, & y'(t) + 2y(t) = 0, & y'(t) - t\,y(t) = 0, \\ y'(t) + \cos(t)\,y(t) = 0, & y'(t) + 3\,y(t) = 2, & y'(t) + y(t) = t^2, \\ y'(t) = 5y(t) + e^t, & y'(t) + 2\,t\,y(t) = t. & \end{array}$$

SOLUZIONE:

**Osservazione 11.1.** *Per integrale generale si intende la totalitá delle funzioni $y(t)$ che soddisfano l'equazione assegnata:*

- *nel caso delle equazioni lineari di primo ordine omogenee l'integrale generale ha la forma $k\,y_0(t)$, dove $y_0(t)$ é una soluzione non nulla dell'equazione,*
- *nel caso delle equazioni lineari di primo ordine non omogenee l'integrale generale ha la forma $\overline{y}(t) + ky_0(t)$ dove $\overline{y}(t)$ é una soluzione dell'equazione non omogenea e $y_0(t)$ é una soluzione non nulla dell'equazione omogenea.*

$$y'(t) = 5 \quad \to \quad y(t) = 5t + k$$

$$\begin{array}{lll} y'(t) + 2y(t) = 0 & \to & y(t) = k\,e^{-2t} \\ y'(t) - t\,y(t) = 0 & \to & y(t) = k\,e^{t^2/2} \\ y'(t) + \cos(t)\,y(t) = 0 & \to & y(t) = k\,e^{-\sin(t)} \end{array}$$

$$y'(t) + 3\,y(t) = 2 \quad \to \quad y(t) = \frac{2}{3} + k\,e^{-3t}$$

$$y'(t) + y(t) = t^2 \quad \to \quad y(t) = t^2 - 2t + 2 + k\,e^{-t}$$

$$y'(t) = 5y(t) + e^t \quad \to \quad -\frac{1}{4}e^t + k\,e^{5t}$$

$$y'(t) + 2\,t\,y(t) = t \quad \to \quad y(t) = \frac{1}{2} + k\,e^{-t^2}$$

**11.4. Esercizio.** *Determinare la soluzione del problema di Cauchy:*

$$y'(t) - y(t) = 1 + t; \qquad y(0) = 1.$$

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'omogenea $y'(t) - y(t) = 0$ sono $y_0(t) = k\, e^t$.
Una soluzione particolare della non omogenea assegnata puó essere cercata come polinomio di primo grado

$$\overline{y}(t) = At + B$$

Sostituendo nell'equazione

$$A - At - B = 1 + t \quad \to \quad -A = 1, \quad B = -2$$

da cui $\overline{y}(t) = -t - 2$
Tutte le soluzioni dell'equazione assegnata sono

$$y(t) = -t - 2 + ke^t$$

La condizione iniziale implica $-2 + k = 1 \quad \to \quad k = 3$.
La soluzione del problema di Cauchy é pertanto

$$y(t) = -t - 2 + 3e^t$$

**11.5. Esercizio.** *Determinare la soluzione e disegnare il grafico:*

$$\begin{array}{ll} 2y' - 6y = 1, & y(0) = \frac{5}{6} \\ y' - 3y = e^{2t}, & y(0) = 0 \end{array}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

- $2y' - 6y = 1 \quad \to \quad y(t) = -\dfrac{1}{6} + ke^{3t} \quad \to \quad k = 1 \quad \to \quad y(t) = -\dfrac{1}{6} + e^{3t}$
- $y' - 3y = e^{2t} \quad \to \quad y(t) = -e^{2t} + ke^{3t} \quad \to \quad k = 1 \quad \to \quad y(t) = -e^{2t} + e^{3t}$

**11.6. Esercizio.** Determinare la soluzione dei seguenti problemi:

$$\begin{array}{lll} y'' - y = 0 & y(0) = 1 & y'(0) = 0 \\ y'' + y' + y = 0 & y(0) = 1 & y'(0) = 0 \\ y'' - 3y' + 2y = 0 & y(1) = 0 & y'(1) = 2 \end{array}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

- $y'' - y = 0 \quad \to \quad y(t) = Ae^t + Be^{-t} \quad \to$
  $\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases} \quad \to \quad A = B = \dfrac{1}{2} \quad \to \quad y(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$

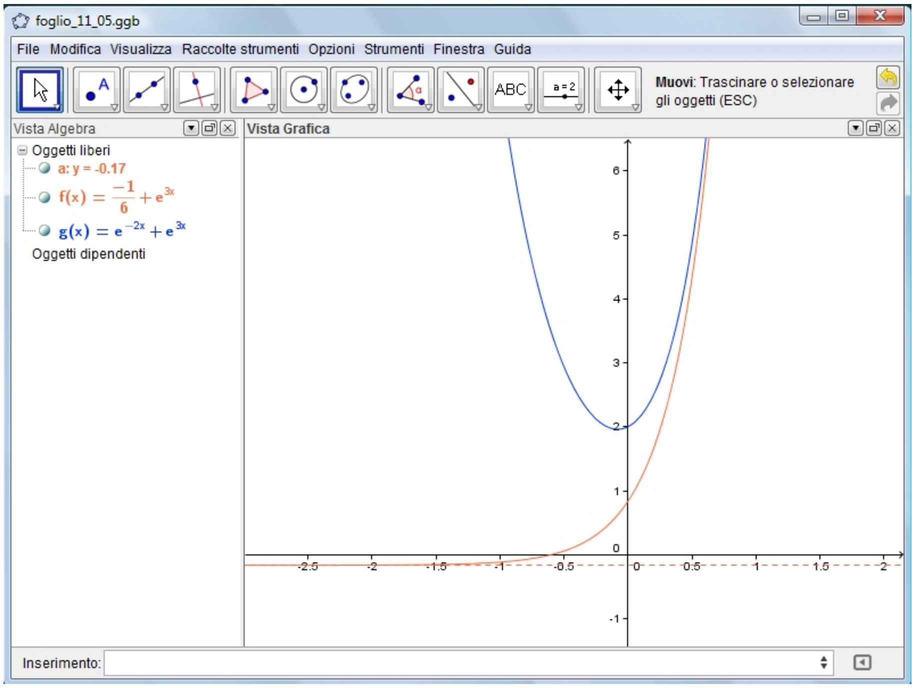


FIGURA 1. $y(t) = -\dfrac{1}{6} + e^{3t}, \quad y(t) = -e^{2t} + e^{3t}$

- $y''+y'+y=0 \quad \to \quad y(t) = e^{-t/2}\left(A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}B = 0 \end{cases} \quad \to \quad A = 1,\ B = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \to$$

$$\to \quad y(t) = e^{-t/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

- $y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \to \quad y(t) = Ae^{3t} + Be^{2t}$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + 2B = 2 \end{cases} \quad \to \quad A = 2,\ B = -2 \quad \to$$

$$\to \quad y(t) = 2e^{3t} - 2e^{2t}$$

**11.7. Esercizio.** *Data l'equazione differenziale*

$$y''(t) + y(t) = \cos(2\,t)$$

*determinare:*

- *la soluzione generale;*
- *la soluzione $u(t)$ tale che $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

La soluzione generale dell'omogenea associata $y''(t)+y(t)=0$ é $y_0(t) = A\cos(t)+B\sin(t)$.
Una soluzione particolare della equazione assegnata puó essere cercata nella forma

$$y(t) = \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)$$

Sostituendo si ottiene

$$-4\alpha\cos(2t) - 4\beta\sin(2t) + \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t) = \cos(2t)$$

da cui segue

$$\begin{cases} -4\alpha + \alpha = 1 \\ -4\beta + \beta = 0 \end{cases} \quad \to \quad \alpha = -\frac{1}{3},\ \beta = 0 \quad \to \quad \overline{y}(t) = -\frac{1}{3}\cos(2t)$$

La soluzione generale é pertanto

$$y(t) = -\frac{1}{3}\cos(2t) + A\cos(t) + B\sin(t)$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato é pertanto

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} + A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \quad \to \quad y(t) = -\frac{1}{3}\cos(2t) + \frac{4}{3}\cos(t)$$

**11.8. Esercizio.** *Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine, a coefficienti costanti, omogenee:*

$$\begin{aligned} &y'' + 3y' - 10y = 0 \\ &y'' - 4y' + 4y = 0 \\ &y'' + y' + y = 0 \\ &y'' - 3y' + 2y = 0 \\ &y'' - 2y' + 2y = 0 \\ &y'' - 4y' = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$y'' + 3y' - 10y = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad y(t) = Ae^{-5t} + Be^{2t}$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \lambda = 2 \quad \rightarrow \quad y(t) = e^{2t}\,(A + Bt)$$

$$y'' + y' + y = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad y(t) = e^{-t/2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad y(t) = Ae^{t} + Be^{2t}$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 + i \\ \lambda_2 = -1 - i \end{cases} \quad \rightarrow \quad y(t) = e^{-t}\,(A\cos(t) + B\sin(t))$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad y(t) = Ae^{-2t} + Be^{2t}$$

**11.9. Esercizio.** *Determinare un integrale particolare delle seguenti equazioni:*

$$\begin{aligned} &y'' + y = 2te^{t} \\ &y'' - 2y' + y = (18t - 4)\mathrm{e}^{t} \\ &y'' + y = t + \cos(t) \\ &y'' - y = \sin(2t) + e^{2t} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$\boxed{y'' + y = 2te^{t}}$

Una soluzione della equazione assegnata puó essere cercata nella famiglia

$$(At + B)e^{t}$$

sostituendo si ottiene

$$2Ae^{t} + 2(At + B)e^{t} = te^{t} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$$

Da cui la soluzione particolare

$$\overline{y}(t) = \frac{1}{2}\,(t - 1)\ e^{t}$$

$\boxed{y'' - 2y' + y = (18t - 4)\mathrm{e}^t}$

Tenuto conto sia $e^t$ che $te^t$ sono soluzioni dell'omogenea sará necessario cercare soluzioni dell'equazione assegnata nella famiglia

$$(At^3 + Bt^2)e^t$$

Sostituendo si ottiene

$$22e^t(3At+B) = (18t-4)\mathrm{e}^t \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 6A = 18 \\ 2B = -4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad A = 3,\ B = -2$$

da cui

$$\overline{y}(t) = (3t^3 - 2t^2)e^t$$

$\boxed{y'' + y = t + \cos(t)}$

Una soluzione particolare dell'equazione é somma di una soluzione particolare della $y'' + y = t$ e una della $y''+ = \cos(t)$.
Per la prima c'é ovviamente $\overline{y}_1(t) = t$.
Per la seconda, tenuto conto che $\cos(t)$ e $\sin(t)$ sono giá soluzioni dell'omogenea associata, si cercherá la soluzione nella famiglia

$$t(A\cos(t) + B\sin(t))$$

Sostituendo si ottiene

$$(B-2A)\sin(t)+B\cos(t) = \cos(t) \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} -2A + B = 0 \\ B = 1 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2},\ B = 1$$

e quindi

$$\overline{y}_2(t) = t\left\{\frac{1}{2}\cos(t) + \sin(t)\right\}$$

La soluzione particolare dell'equazione assegnata é pertanto

$$\overline{y}(t) = \overline{y}_1(t) + \overline{y}_2(t) = t + t\left\{\frac{1}{2}\cos(t) + \sin(t)\right\}$$

$\boxed{y'' - y = \sin(2t) + e^{2t}}$

Separando i due addendi a secondo membro si devono cercare due soluzioni particolari delle

$$y'' - y = \sin(2t), \qquad y'' - y = e^{2t}$$

Una soluzione per la prima si trova nella famiglia $A\cos(2t) + B\sin(2t)$: sostituendo si ottiene

$$-5A\cos(2t) - 5B\sin(2t) = \sin(2t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -5A = 0 \\ -5B = 1 \end{cases}$$

La soluzione particolare é pertanto

$$\overline{y}_1(t) = -\frac{1}{5}\sin(2t)$$

Analogamente per la seconda, una soluzione si trova nella famiglia $Ae^{2t}$: sostituendo si ottiene

$$3A = 1 \quad \to \quad \overline{y}_2(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}$$

La soluzione particolare é pertanto

$$\overline{y}(t) = \overline{y}_1(t) + \overline{y}_2(t) = -\frac{1}{5}\sin(2t) + \frac{1}{3}e^{2t}$$

**11.10. Esercizio.** *Determinare al variare di $p \in \mathbb{R}$ l'integrale generale dell'equazione*

$$y'' + (p-1)y' + (p-2)y = t.$$

SOLUZIONE:

L'integrale generale $y_0(t)$ dell'omogenea dipende dalle radici $\lambda$ dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + (p-1)\lambda + (p-2) = 0 \quad \to \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{1 - p \pm \sqrt{p^2 - 6p + 9}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 - p \pm \sqrt{(p-3)^2}\right\}$$

$$\begin{cases} p \neq 3 \quad \to \quad \begin{cases} \lambda_1(p) = \frac{1}{2}\{1 - p + |p-3|\} \\ \\ \lambda_2(p) = \frac{1}{2}\{1 - p - |p-3|\} \end{cases} \\ \\ p = 3 \quad \to \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}(1-p) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \neq 3 \quad \to \quad y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1(p)t} + c_2 e^{\lambda_2(p)t} \\ \\ p = 3 \quad \to \quad y_0(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t) \end{cases}$$

Una soluzione particolare $\overline{y}(t)$ si trova nella famiglia $At^2 + Bt + C$ : sostituendo si ottiene

$$2A+(p-1)(2At+B)+(p-2)(At^2+Bt+C)=t \to \begin{cases} (p-2)A=0 \\ 2(p-1)A+(p-2)B=1 \\ 2A+(p-1)B+(p-2)C=0 \end{cases}$$

che implica

$$\begin{cases} p\neq 2 & \to \quad A=0,\ B=\dfrac{1}{p-2}, C=-\dfrac{p-1}{(p-2)^2} \\ p=2 & \to \quad A=\dfrac{1}{2},\ B=-1,\ C=0 \end{cases}$$

Ovvero

$$\begin{cases} p\neq 2 & \to \quad \overline{y}(t)=\dfrac{1}{p-2}t-\dfrac{p-1}{(p-2)^2} \\ p=2 & \to \quad \overline{y}(t)=\dfrac{1}{2}t^2-t \end{cases}$$

Riassumendo l'integrale generale dell'equazione assegnata é:

$$p=3 \qquad \to \qquad y(t)=t-2+e^{-t}(c_1+c_2t)$$

$$p=2 \qquad \to \qquad y(t)=\frac{1}{2}t^2-t+c_1+c_2e^{-t}$$

$$p\neq 2,3 \qquad \to \qquad y(t)=\frac{1}{p-2}t-\frac{p-1}{(p-2)^2}+c_1e^{\lambda_1(p)t}+c_2e^{\lambda_2(p)t}$$

**11.11. Esercizio.** *Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y''(t)+2\,a\,y'(t)+a^2\,y(t)=\mathrm{e}^{-t}$$

*al variare di* $a\in\mathbb{R}$.

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$y''(t)+2\,a\,y'(t)+a^2\,y(t)=0$$

dipendono dalle radici dell'equazione in $\lambda$

$$\lambda^2+2a\lambda+a^2=0 \quad\to\quad \lambda_1=\lambda_2=-a$$

e sono pertanto

$$y_0(t)=e^{-at}\,(c_1+c_2t)$$

Una soluzione particolare della equazione assegnata si puó trovare se $a \neq 1$ nella famiglia $Ae^{-t}$: sostituendo si ha

$$A(1-2a+a^2) = 1 \quad \to \quad A = \frac{1}{1-2a+a^2} \quad \to \quad \overline{y}(t) = \frac{1}{1-2a+a^2}e^{-t}$$

Invece se $a = 1$ la soluzione deve essere cercata nella famiglia

$$(At^2 + Bt + C)e^{-t}$$

Sostituendo si ha

$$2Ae^{-t} = e^{-t} \quad \to \quad A = \frac{1}{2} \quad \to \quad \overline{y}(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t}$$

Riassumendo le soluzioni dell'equazione assegnata sono

$$\begin{array}{lll} a = 1 & \to & y(t) = \frac{1}{2}\,t^2\,e^{-t} + e^{-t}\,(c_1 + c_2 t) \\ a \neq 1 & \to & y(t) = \frac{1}{1-2a+a^2}e^{-t} + e^{-at}\,(c_1 + c_2 t) \end{array}$$

**Osservazione 11.2.** *Il notissimo sito Web*

*http://www.wolframalpha.com/*

*consente di risolvere numerosi esercizi (o meglio di verificare la correttezza delle soluzioni trovate) con ricchezza di informazioni.*
*Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = \cos(t) \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 2 \end{cases}$$

*Si assegna semplicemente scrivendo nella casella di Input*

`x''(t) + x(t) = cos(t), x(0) = 1, x'(0) = 2`

*La risposta che si ottiene quasi immediatamente si legge nella pagina allegata.*
*I due grafici illustrati in basso rappresentano, il primo il tradizionale grafico della soluzione $x(t)$ trovata, il secondo rappresenta la curva di equazioni parametriche $\{x(t), x'(t)\}$.*