

**COGNOME NOME :**

**Si prega di riconsegnare il testo d'esame insieme all'elaborato**

**Primo Esonero di VARIABILE COMPLESSA - 24 aprile 2015**

**Esercizio 1** Determinare l'insieme di olomorfia della funzione

$$f(z) = (z^2 + 4)^z$$

ove si assume la determinazione principale della potenza. Calcolare  $f(i)$  e  $|f(i)|$ .

**Esercizio 2** Sia  $\gamma$  la circonferenza del piano complesso  $|z-4| = 2$ , orientata positivamente in verso antiorario.

Calcolare i seguenti integrali

$$a) \int_{+\gamma} \frac{\sin z}{(z-\pi)^2} dz; \quad b) \int_{+\gamma} \frac{\sin z}{(z+\pi)^2} dz; \quad c) \int_{+\gamma} \frac{\sqrt{z} \cos z}{z-\pi} dz$$

assumendo in c) la determinazione principale della radice .

**Esercizio 3** Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) z^{3k}.$$

- a) Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze e studiare la convergenza della serie nel campo di convergenza.
- b) Studiare il comportamento della serie di potenze sulla frontiera del campo di convergenza.

**Esercizio 4** Sia

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y) = \sin(\alpha y)(e^x - e^{-x}).$$

Determinare per quali valori di  $\alpha$ , reali e non nulli,  $u$  è la parte reale di una funzione  $f$  olomorfa in  $\mathbb{C}$  . Per ognuno di questi valori:

- a) determinare la funzione  $f(z)$  per cui  $f(0) = -2\alpha i$ ;
- b) determinare gli  $z \in \mathbb{C}$  tali che  $f(z) = -i\alpha(e^z + 2)$ .