

# COMBINATORIA

Claudia Malvenuto  
Scheda di esercizi n. 7

1. Dimostrare che il numero cromatico di qualsiasi albero con almeno due vertici è 2.
2. Sia  $K(n, r)$  il grafo (detto *grafo di Kneser*) che ha come vertici tutti i sottoinsiemi di cardinalità  $r$  di  $[n]$  e come archi le coppie di insiemi la cui intersezione è vuota.
  - (a) Si mostri che, per ogni  $n$ ,  $K(n, 1)$  è isomorfo a  $K_n$ . Come è fatto  $K(n, n - 1)$ ?
  - (b) Si trovi il numero cromatico di  $K(5, 2)$ . (È isomorfo a un grafo visto in un precedente esercizio. Quale?)
3. Si consideri una carta geografica in cui il bordo complessivo delle regioni sia un circuito euleriano (equivalentemente: si tracci una curva chiusa, che può intersecare se stessa in vari punti, e si considerino le regioni del piano così identificate). Dimostrare che questa carta si può colorare con due colori.
4. Sia  $H_n$  il grafo che ha come vertici tutte le stringhe binarie di lunghezza  $n$ , e in cui due vertici sono adiacenti se differiscono in una sola posizione (tale grafo viene chiamato *ipercubo di dimensione  $n$* ). Dimostrare che  $H_n$  è un grafo bipartito.
5. Un *ciclo di de Bruijn* per le stringhe binarie di lunghezza  $n$  è una collana con perle 0 o 1 le cui sottostringhe lunghe  $n$  sono tutte le stringhe binarie di lunghezza  $n$  e di più dove ciascuna appare una sola volta.

Dimostrare che per ogni  $n$  esiste un ciclo di de Bruijn per le stringhe binarie di lunghezza  $n$ . (Suggerimento: considerare il grafo che ha come

vertici le stringhe di lunghezza  $n - 1$ , in cui due stringhe sono adiacenti se il suffisso di lunghezza  $n - 2$  di una è uguale al prefisso di lunghezza  $n - 2$  dell'altra.)

Descrivere esplicitamente un ciclo di de Bruijn per  $n = 3$  e  $n = 4$ .

6. Se  $G$  è un grafo sconnesso, è ancora vero che  $G$  è bipartito se e solo se  $G$  non ha cicli dispari?
7. Dimostrare che il numero cromatico di  $G$  è il minimo numero di stabili che ricoprono  $G$ .
8. Siano dati un grafo  $G$  e una partizione  $\mathcal{P}$  dei vertici di  $G$  in classi  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  (cioè  $V(G) = \bigcup_i C_i$  e gli insiemi  $C_i$  sono a due a due disgiunti). Consideriamo i grafi  $G[C_i]$  indotti dagli insiemi dei vertici delle parti  $C_i$  e definiamo un funzionale  $\psi$  che dipende dalla partizione  $\mathcal{P}$  :

$$\psi(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^r (1 + d(G[C_i])),$$

dove  $d(G[C_i])$  è il grado del grafo  $G[C_i]$ .

Dimostrare che

$$\chi(G) = \min\{\psi(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizione dei vertici}\}.$$