ESERCIZI SUL PRINCIPIO DI INDUZIONE E SUI NUMERI DI FIBONACCI

MARCO MANETTI

In risposta ad un problema pratico di coniglicoltura, Leonardo Pisano (1170-1250), figlio di Bonaccio (Fibonacci), scrive nel suo Liber Abaci la successione

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377.$$

In linguaggio moderno si definisce la successione dei *numeri di Fibonacci* tramite la formula ricorsiva

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad n \geq 1.$$

I numeri di Fibonacci hanno alcune interessanti proprietà che li rendono interessanti nelle scienze ma anche nelle pseudoscienze: non è infrequente vedere pubblicizzati metodi per vincere alla roulette basati sui numeri di Fibonacci, venduti a caro prezzo da sedicenti esperti al credulone di turno.

In queste note lasceremo da parte gli aspetti esoterici e ci concentreremo solo su quelli matematici.

1. Descrizione combinatoria dei numeri di Fibonacci

Vogliamo contare quante sono, per ogni intero positivo n, le successioni finite $a_1, \ldots, a_k$ di numeri interi tali che

$$2 \leq a_1, \ a_k \leq n, \quad a_{i+1} \geq a_i + 2 \text{ per ogni } i.$$

Indichiamo con u_n tale numero. Abbiamo $u_1 = 1$ (la successione vuota), $u_2 = 2$ (la successione vuota e la successione $a_1 = 2$) ecc.

Una formulazione equivalente del problema è: date $n - 1$ forchette in tavola disposte parallelamente tra loro, si vuole contare in quanti modi è possibile sostituire alcune forchette con dei coltelli in modo che non vi siano due coltelli adiacenti.

Possiamo scrivere $u_n = a + b$, dove a è il numero di successioni $a_1, \ldots, a_k$ con $a_k < n$ e b è è il numero di successioni $a_1, \ldots, a_k$ con $a_k = n$ (e di conseguenza $a_{k-1} \leq n - 2$. È chiaro che $a = u_{n-1}$ e $b = u_{n-2}$ e quindi, per ogni $n \geq 3$ vale $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Siccome $u_1 = F_2$ e $u_2 = F_3$ se ne ricava immediatamente $u_n = F_{n+1}$.

2. Prime proprietà dei numeri di Fibonacci

Lemma 2.1. *Per ogni intero positivo n vale*

1. $F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$.
2. $F_3 + \cdots + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$.
3. $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

Dimostrazione. Esercizio. □

Teorema 2.2 (Zeckendorf)**.** *Per ogni intero positivo N esiste una unica successione $a_1, a_2, \ldots, a_n$ di interi maggiori di 1 tali che:*

1. $a_{i+1} \geq a_i + 2$ *per ogni* $i = 1, \ldots, n - 1$.
2. $N = F_{a_1} + F_{a_2} + \cdots + F_{a_n}$

Dimostrazione. Esercizio. □

Date: 28 ottobre 2010.

Teorema 2.3. *Per ogni $a, n \geq 1$ vale la formula*

$$F_n F_a + F_{n-1} F_{a-1} = F_{n+a-1}.$$

Dimostrazione. Per $a = 1, 2$ la formula è vera. Si procede per induzione su a (esercizio). □

Corollario 2.4. *Per ogni $n, m \geq 1$ vale*

$$MCD(F_n, F_m) = F_{MCD(n,m)}.$$

Dimostrazione. Mostriamo inizialmente per induzione su n che F_n e F_{n+1} non hanno fattori comuni. Se $p > 0$ divide sia F_n che F_{n+1}, allora divide anche $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$.

Dati due numeri interi positivi a, b, denotiamo con $CD(a, b)$ l'insieme dei divisori comuni di a e b, ossia l'insieme dei numeri $s \geq 1$ che dividono a e b. Per definizione, $MCD(a, b)$ è il massimo dell'insieme $CD(a, b)$. Notiamo che, se $a > b$, allora

$$CD(a, b) = CD(a - b, b)$$

e di conseguenza $MCD(a, b) = MCD(a - b, b)$.

Dimostriamo il corollario per induzione su $n + m$. Se $n = m$ il risultato è banale. Supponiamo dunque $n \neq m$ e, per fissare le idee $n > m$. Ponendo $a = n - m$, siccome $MCD(n, m) = MCD(a, m)$, per induzione basta dimostrare che

$$MCD(F_n, F_m) = MCD(F_a, F_m).$$

Abbiamo dimostrato che vale

$$F_n = F_{m+1} F_a + F_m F_{a-1}.$$

Ogni divisore di F_n e F_m divide anche $F_{m+1} F_a$ e quindi

$$CD(F_n, F_m) \subseteq CD(F_{m+1} F_a, F_m).$$

Siccome ogni divisore di F_m non ha fattori comuni con F_{m+1}, se segue che

$$CD(F_{m+1} F_a, F_m) \subseteq CD(F_a, F_m).$$

Viceversa, sempre dalla formula $F_n = F_{m+1} F_a + F_m F_{a-1}$ segue che se un numero divide F_a e F_m, allora divide anche F_n e quindi

$$CD(F_a, F_m) \subseteq CD(F_n, F_m).$$

Dunque $CD(F_a, F_m) = CD(F_n, F_m)$. □

Corollario 2.5. *Sia $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$ la successione dei numeri primi. Allora per ogni $k \geq 4$ vale $p_{k+1} \leq F_{p_k}$.*

Dimostrazione. Sia $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13$, $p_7 = 17$, $p_8 = 19$ ecc. la successione dei numeri primi. Notiamo che $p_{i+1} \leq F_{p_i}$ per $i = 4, 5, 6, 7$. Se $k \geq 8$, abbiamo visto che i numeri di Fibonacci

$$F_3, F_4, F_5, \ldots, F_{19}, \ldots, F_{p_k}$$

sono relativamente primi tra loro e che compaiono almeno $k + 1$ numeri primi nelle loro scomposizioni. Ne segue che esistono $j > k$ e $a \leq k$ tali che p_j divide F_{p_a} e quindi, a maggior ragione

$$p_{k+1} \leq F_{p_k} \quad \text{per ogni } k \geq 8.$$

□

Esercizio 2.6. La definizione dei numeri F_n ha senso anche per n negativo, ad esempio

$$F_{-1} = F_1 - F_0 = 1, \quad F_{-2} = F_0 - F_{-1} = -1, \quad F_{-3} = F_{-1} - F_{-2} = 2, \ \ldots$$

Dimostrare che vale $F_{-n} + (-1)^n F_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. △

Esercizio 2.7. Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti uguaglianze:

(1) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$.
(2) $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$.

△

3. La formula di Binet

Dati due numeri reali a, b, con $a \neq b$, si ha, per ogni $n > 0$ la relazione

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = (a + b)\frac{a^n - b^n}{a - b} - ab\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b}.$$

Dunque, se poniamo

$$A_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

vale

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 1, \quad A_{n+1} = (a + b)A_n - abA_{n-1}.$$

Siano

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

i due numeri reali tali che

$$x + y = 1, \qquad xy = -1, \qquad (1 - xt)(1 - yt) = 1 - t - t^2.$$

Allora, se poniamo

$$F_n = \frac{x^n - y^n}{x - y}.$$

si ha

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

e ritroviamo i numeri di Fibonacci.

Esercizio 3.1. Usare il principio di induzione per mostrare che per ogni $n \geq 1$ vale

$$F_{2n+1} - 1 = \sum_{i=0}^{n} (n - i)F_{2i+1}.$$

△

4. Esercizi extra

Dimostrare le seguenti uguaglianze:
1) $F_n F_{n+1} - F_{n-2}F_{n-1} = F_{2n-1}$.
2) $F_{n+1}F_{n+2} - F_n F_{n+3} = (-1)^n$.
3) $F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$
4) $F_n^3 + F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}$.