AUTOVALORI. NOTE DI ALGEBRA LINEARE 2010-11

MARCO MANETTI: 21 GENNAIO 2011

1. Il polinomio minimo

Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo lineare di uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Per ogni polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ possiamo calcolare p in f:

$$p(f)\colon V \to V\,.$$

Dal momento che

$$\dim \mathcal{L}(V, V) = (\dim V)^2\,,$$

non appena $k \geq (\dim V)^2$, i $k+1$ endomorfismi $I, f, f^2, \dots f^k$ sono linearmente dipendenti in $\mathcal{L}(V, V)$ e quindi esiste una relazione lineare non banale

$$a_0 f^k + a_1 f^{k-1} + a_2 f^{k-2} + \cdots + a_{k-1} f + a_k I = 0\,, \qquad (a_0, \dots, a_k) \neq (0, \dots, 0)\,.$$

In altri temini esiste un polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$, $p(t) \neq 0$, tale che

$$p(f) = 0\,.$$

A meno di moltiplicare $p(t)$ per una costante diversa da 0, si può sempre assumere che un tale polinomio sia **monico**, e cioè che il coefficiente del suo termine di grado massimo sia uguale a 1:

$$p(t) = t^h + a_1 t^{h-1} + \cdots + a_h$$

Tra tutti i polinomi monici (e quindi non nulli) che si annullano in f scegliamone uno di grado minimo. Un tale polinomio è unico perché se ce ne fossero due

$$p(t) = t^h + a_1 t^{h-1} + \cdots + a_h\,, \qquad q(t) = t^h + b_1 t^{h-1} + \cdots + b_h\,,$$

posto

$$r(t) = p(t) - q(t) = ct^s + \cdots\,, \qquad c \neq 0\,,$$

risulterebbe $s < h$ e il polinomio $r(t)/c$ sarebbe un polinomio monico di grado strettamente inferiore al grado di $p(t)$, che si annulla su f. Il che è assurdo a meno che non sia $q(t) = p(t)$.

Denoteremo con $q_f(t)$ il polinomio monico di grado minimo che si annulla in f e lo chiameremo **polinomio minimo** di f. Osserviamo che, se $V \neq 0$, allora il polinomio minimo ha sempre grado maggiore di 0. Infatti l'unico polinomio monico di grado 0 è $p(t) = 1$ e quindi $p(f) = I \neq 0$.

Teorema 1.1. *Sia $p(t)$ un polinomio tale che $p(f) = 0$. Allora esiste un polinomio $h(t) \in \mathbb{K}[t]$ tale che $p(t) = q_f(t)h(t)$*

Dimostrazione. Per la divisione euclidea tra polinomi esistono, e sono unici, due polinomi $h(t)$ e $r(t)$ tali che $p(t) = h(t)q_f(t) + r(t)$ e $\deg r(t) < \deg q_f(t)$. Poiché

$$0 = p(f) = h(f)q_f(f) + r(f) = r(f)$$

si deve avere $r(t) = 0$, per la minimalità di $q_f(t)$. □

Corollario 1.2. *Il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico.*

Dimostrazione. Per il teorema di Cayley-Hamilton il polinomio caratteristico annulla l'endomorfismo. □

Corollario 1.3. *Siano $f\colon V \to V$ un endomorfismo e sia $U \subset V$ un sottospazio f-invariante, ossia $f(U) \subseteq U$. Allora il polinomio minimo della restrizione $f_{|U}\colon U \to U$ divide il polinomio minimo do f.*

Dimostrazione. Per ogni vettore $u \in U$ si ha

$$0 = q_f(f)u = q_f(f_{|U})u$$

e quindi il polinomio q_f annulla l'edomorfismo $f_{|U}$. □

Esercizi.

1.1. Mostrare che un endomorfismo f è nilpotente se e solo se il suo polinomio minimo è uguale a t^k per qualche $k \geq 0$.

1.2. Calcolare il polinimio minimo dell'endomorfismo

$$T\colon M_{n,n}(\mathbb{K}) \to M_{n,n}(\mathbb{K}), \qquad T(A) = A^T \ .$$

1.3. Sia $a \in \mathbb{K}$. Calcolare il polinomio minimo di $f = aI$.

1.4. Sia f un endomorfismo tale che $f^2 = I$ e $f \neq \pm I$. Calcolare il polinomio minimo di f.

1.5. Siano $m, n > 0$ e $F \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Dimostrare che il polinomio minimo dell'endomorfismo

$$f\colon M_{n,m}(\mathbb{K}) \to M_{n,m}(\mathbb{K}), \qquad f(A) = FA,$$

è uguale al polinomio minimo di F. Cosa si può dire del polinomio caratteristico?

1.6. Sia $f\colon V \to V$ di rango 1. Provare che se $\dim V = n > 1$, allora i polinomi minimo e caratteristico di f sono

$$q_f(t) = t(t - \mathrm{Tr}(f)), \qquad p_f(t) = (-1)^n t^{n-1}(t - \mathrm{Tr}(f)).$$

(Sugg.: in una base opportuna f si rappresenta con una matrice con le prime $n-1$ colonne nulle.)

2. Autovalori ed autovettori

Definizione 2.1. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo lineare. Un **autovettore** per f è un vettore *non nullo* $v \in V$ tale che

$$f(v) = \lambda v$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$. In questo caso si dice che λ è un **autovalore** di f e che v è un autovettore relativo all'autovalore λ.

Esempio 2.2. Se $f\colon V \to V$ non è invertibile, allora ogni vettore non nullo del nucleo è un autovettore relativo all'autovalore 0.

È utile dare una definizione equivalente di autovalore. Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ definiamo

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda I).$$

Notiamo che V_λ è un sottospazio vettoriale che dipende da λ e da f. Tuttavia, per semplicità notazionale, la dipendenza da f rimane sottointesa. Siccome $v \in V_\lambda$ se e solo se $f(v) - \lambda v = 0$, si deduce immediatamente che λ è un autovettore se e solo se $V_\lambda \neq 0$.

Definizione 2.3. Se λ è un autovalore di un endomorfsmo $f\colon V \to V$, i sottospazi $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda I)$ e $E_\lambda = \mathrm{Rad}(f - \lambda I)$ sono detti rispettivamente **autospazio** e **autospazio generalizzato** relativo a λ.

Proposizione 2.4. *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo. Un numero $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore per f se e solo se $\det(f - \lambda I) = 0$, ossia se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico $p_f(t)$ di f.*

Dimostrazione. Siccome V ha dimensione finita si ha $\mathrm{Ker}(f - \lambda I) \neq 0$ se e solo se $\det(f - \lambda I) = 0$. □

Lemma 2.5. *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo e sia $p(t) \in \mathbb{K}[t]$. Se $v \in V$ è un autovettore per f con autovalore λ, allora v è anche un autovettore per $p(f)$ con autovalore $p(\lambda)$.*

Dimostrazione. Se $f(v) = \lambda v$, allora

$$f^2(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v.$$

Più in generale, si dimostra per induzione su k che $f^k(v) = \lambda^k v$: infatti

$$f^k(v) = f(f^{k-1}(v)) = f(\lambda^{k-1}v) = \lambda^{k-1}f(v) = \lambda^k v.$$

Quindi, se $p(t) = a_k t^k + \cdots + a_1 t + a_0$ si ha

$$p(f)(v) = a_k f^k(v) + \cdots + a_1 f(v) + a_0 v = (a_k\lambda^k + \cdots + a_1\lambda + a_0)v = p(\lambda)v.$$

□

Teorema 2.6. *Gli autovalori di un endomorfismo f sono tutte e sole le radici in $\mathbb{K}$ del polinomio minimo di f.*

Dimostrazione. Sia $q_f(t)$ il polinomio minimo e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Se $q_f(\lambda) = 0$, siccome il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico, a maggior ragione λ è una radice del polinomio caratteristico, quindi un autovalore. Viceversa se λ è un autovalore e $v \neq 0$ è un autovettore corrispondente si ha

$$0 = q_f(f)v = q_f(\lambda)v$$

da cui si deduce che $q_f(\lambda) = 0$. □

Esercizi.

2.1. Calcolare polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori ed autovettori delle matrici (intese come endomorfismi di $\mathbb{C}^n$)

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Determinare gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

2.3. Siano $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Dimostrare che AB e BA hanno gli stessi autovalori ma non necessariamente gli stessi autovettori. Dimostrare inoltre che se A è invertibile allora AB e BA hanno lo stesso polinomio caratteristico (questo vale anche se $|A| = |B| = 0$ ma è un più difficile da dimostrare).

2.4. Dimostrare che ogni matrice si può scrivere come somma di due matrici invertibili che commutano tra loro.

3. Molteplicità algebrica e geometrica

Definizione 3.1. Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore per un endomorfismo $f\colon V \to V$. La **molteplicità geometrica** di λ (relativa ad f) è la dimensione di $\operatorname{Ker}(f - \lambda I)$. La **molteplicità algebrica** di λ (relativa ad f) è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico $p_f(t)$.

Ricordiamo la definizione di molteplicità di una radice: se λ è una radice di un polinomio $p(t)$, per Ruffini possiamo scrivere $p(t) = (t - \lambda)p_1(t)$; se λ è ancora una radice di $p_1(t)$ si riapplica Ruffini $p(t) = (t - \lambda)^2 p_2(t)$. Proseguendo si arriva a scrivere $p(t) = (t - \lambda)^k p_k(t)$, con $p_k(\lambda) \neq 0$. Il numero k è per definizione la molteplicità della radice λ. Una radice si dice **semplice** se ha molteplicità 1.

Si noti che, le molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore sono entrambe maggiori od uguali a 1.

Lemma 3.2. *Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore dell'endomorfismo $f\colon V \to V$. Allora la molteplicità algebrica di λ è uguale alla dimensione di* $\operatorname{Rad}(f-\lambda I)$. *In particolare, la molteplicità algebrica è sempre maggiore od uguale alla molteplicità geometrica.*

Dimostrazione. Siano $g = f-\lambda I$ e k la dimensione del radicale di g. Per il teoremino di struttura, in una opportuna base possiamo rappresentare g con una matrice diagonale a blocchi

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

con A matrice $k\times k$ nilpotente e B invertibile. Dunque $p_g(t) = \pm t^k p_B(t)$, dove $p_B(0) \neq 0$ essendo B invertibile. Ma allora

$$p_f(t) = \det(f-tI) = \det(g-(t-\lambda)I) = p_g(t-\lambda) = \pm(t-\lambda)^k p_B(t-\lambda) = (t-\lambda)^k q(t),$$

dove $q(t) = \pm p_B(t-\lambda)$ e dunque $q(\lambda) = \pm p_B(0) \neq 0$.

La disuguaglianza tra le molteplicità segue dal fatto che il radicale contiene in nucleo. □

Lemma 3.3. *Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore dell'endomorfismo $f\colon V \to V$. Allora la molteplicità di λ come radice del polinomio minimo è uguale al più piccolo intero positivo τ tale che* $\operatorname{Rad}(f-\lambda I) = \operatorname{Ker}(f-\lambda I)^{\tau}$.

Dimostrazione. A meno di sostituire f con $f-\lambda I$ non è restrittivo supporre $\lambda = 0$. Scriviamo il polinomio minimo di f nella forma $q_f(t) = t^{\sigma}h(t)$, con $h(0) \neq 0$ e dimostriamo che valgono le disuguaglianze $\sigma \geq \tau$ e $\sigma \leq \tau$.

Scegliamo un vettore $v \in \operatorname{Ker}(f^{\tau}) - \operatorname{Ker}(f^{\tau-1})$ e poniamo $w = f^{\tau-1}(v)$, allora $w \neq 0$ e $f(w) = 0$, ossia w è un autovettore per f relativo all'autovalore 0. Se fosse $\sigma \leq \tau - 1$ allora

$$0 = f^{\tau-\sigma-1}q_f(f)v = h(f)f^{\tau-1}(v) = h(f)w = h(0)w \neq 0$$

e questo prova che $\sigma \geq \tau$. Viceversa, per il teoremino di struttura, in una opportuna base possiamo rappresentare f con una matrice a blocchi

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

dove $A^{\tau} = 0$ e B invertibile. Per Cayley-Hamilton tale matrice è annullata dal polinomio $t^{\tau}p_B(t)$ che risulta pertanto divisibile per il polinomio minimo; siccome $p_B(0) \neq 0$ ne segue che $\tau \geq \sigma$. □

Teorema 3.4. *Per un autovalore λ di un endomorfismo $f\colon V \to V$ le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *La molteplicità geometrica di λ è uguale alla molteplicità algebrica.*
2. $\operatorname{Ker}(f-\lambda I) = \operatorname{Rad}(f-\lambda I)$.
3. $\operatorname{Ker}(f-\lambda I) = \operatorname{Ker}(f-\lambda I)^2$.
4. *λ è una radice semplice del polinomio minimo di f.*

Dimostrazione. L'equivalenze $[1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 4]$ seguono dai lemmi precedenti, mentre $[2 \Rightarrow 3]$ segue dal fatto che

$$\operatorname{Ker}(f-\lambda I) \subset \operatorname{Ker}(f-\lambda I)^2 \subset \operatorname{Rad}(f-\lambda I).$$

Viceversa, sappiamo dalla teoria della filtrazione dei nuclei che se $\operatorname{Ker}(f-\lambda I) = \operatorname{Ker}(f-\lambda I)^2$ allora $\operatorname{Ker}(f-\lambda I)^k = \operatorname{Ker}(f-\lambda I)^{k+1}$ per ogni $k > 0$ e questo prova l'implicazione $[3 \Rightarrow 2]$. □

Esercizi.

3.1. Calcolare i polinomi minimo e caratteristico delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Matrici triangolabili

Definizione 4.1. Un endomorfismo $f\colon V \to V$ si dice **triangolabile** se, in una base opportuna, si rappresenta con una matrice triangolare superiore.

In altri termini, f è triangolabile se e solo se esiste una base $v_1, \dots, v_n$ tale che per ogni i il sottospazio $L(v_1, \dots, v_i)$ è f-invariante. Infatti, ciò significa che

$$f(v_i) \in L(v_1, \dots, v_i)\,, \quad \forall \quad i = 1, \dots, n\,.$$

cosicché la matrice di f nella base $v_1, \dots, v_n$ è triangolare superiore.

Se un endomorfismo f è triangolabile, il suo polinomio caratteristico è un prodotto di polinomi di primo grado e quindi f possiede tutti gli autovalori nel campo $\mathbb{K}$. vale anche il vivecersa:

Teorema 4.2. *Un endomorfismo $f\colon V \to V$ è triangolabile se e solo se il suo polinomio caratteristico ha tutte le radici in $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla dimensione di V. Se $\dim V = 0$ non c'è nulla da dimostrare, mentre se $\dim V = 1$ allora esiste un autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$. Sia v un autovettore di f. relativo all'autovalore λ e sia $U \subset V$ il sottospazio *proprio* definito da

$$U = (F - \lambda I)(V)\,, \qquad \dim U < \dim V\,.$$

Si osservi che

$$F(U) \subset U\,.$$

Infatti se $u = (F - \lambda I)(w) \in U$, si ha:

$$F(u) = F(F - \lambda I)(w) = (F - \lambda I)F(w) \in Im(F - \lambda I) = U\,.$$

Il polinomio caratteristico della restrizione $f_{|U}$ divide il polinomio caratteristico di f e quindi ha tutte le radici in $\mathbb{K}$; dunque si può usare l'ipotesi induttiva a $f_{|U}$. Si può quindi trovare una base $u_1, \dots, u_m$ di U tale che

$$F_{|U}(u_i) = F(u_i) \in L(u_1, \dots, u_i)\,, \quad \forall \quad i = 1, \dots, m\,.$$

Si completi ora la base $u_1, \dots, u_m$ di U a una base $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots v_s$ di V. In questa base f è in forma triangolare. Infatti:

$$f(v_i) = f(v_i) - \lambda v_i + \lambda v_i = (f - \lambda)v_i + \lambda v_i \in U + L(v_i) \subset L(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_i)\,.$$

□

Corollario 4.3. *Sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$, ogni endomorfismo lineare è triangolabile.*

5. Diagonalizzazione

Lemma 5.1. *Siano $f\colon V \to V$ un endomorfismo lineare, $U \subset V$ un sottospazio f-invariante e $v_1, \dots, v_s \in V$ autovettori relativi ad autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Se $v_1 + \cdots + v_s \in U$ allora $v_i \in U$ per ogni $i = 1, \dots, s$.*

Dimostrazione. Induzione su s, non dovendo dimostrare nulla per $s = 1$. Supponiamo quindi il risultato vero per $s - 1$ autovettori relativi ad autovalori distinti. Siccome $v_1 + \cdots + v_s \in U$ e $f(U) \subset U$ si ha

$$f(v_1 + \cdots + v_s) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s \in U, \qquad \lambda_s(v_1 + \cdots + v_s) \in U.$$

Dunque appartiene ad U anche la differenza

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s - \lambda_s(v_1 + \cdots + v_s) = (\lambda_1 - \lambda_s)v_1 + \cdots + (\lambda_{s-1} - \lambda_s)v_{s-1}$$

Siccome $\lambda_i - \lambda_s \neq 0$, i vettori $(\lambda_i - \lambda_s)v_i$ sono, per $i = 1, \dots, s-1$, autovettori per f relativi ad autovalori distinti; per l'ipotesi induttiva $(\lambda_i - \lambda_s)v_i \in U$ per ogni $i = 1, \dots, s-1$. Dunque anche $v_i \in U$ per $i < s$ e di conseguenza

$$v_s = (v_1 + \cdots + v_s) - v_1 - \cdots - v_{s-1} \in U.$$

□

Lemma 5.2. *Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ autovalori distinti di un endomorfismo f e si considerino i relativi autospazi $V_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i I)$. Allora esiste una decomposizione in somma diretta:*

$$V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s} = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} \subseteq V.$$

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che ogni vettore $w \in V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s}$ si scrive in modo unico come somma di vettori in ciascun V_{λ_i}. Basta quindi verificare che se

$$v_1 + \cdots + v_s = 0\,, \qquad v_i \in V_{\lambda_i}\,, \quad i = 1, \dots, s\,,$$

allora $v_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, s$. Questo segue dal precedente lemma prendendo come sottospazio invariante $U = 0$. □

Un endomorfismo $f\colon V \to V$ si dice **diagonalizzabile** se esiste una base rispetto alla quale f si rappresenta con una matrice diagonale. Equivalentemente $f\colon V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di V fatta con autovettori per f.

Teorema 5.3. *Sia $\dim V = n$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ gli autovalori nel campo $\mathbb{K}$ di un endomorfismo $f\colon V \to V$. Se indichiamo con μ_i la molteplicità geometrica di λ_i, allora f è diagonalizzabile se e soltanto se*

$$\mu_1 + \cdots + \mu_s = n.$$

Dimostrazione. Per il lemma precedente la somma dei sottospazi V_{λ_i} è diretta e quindi $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$ ha dimensione $\mu_1 + \cdots + \mu_s$. Basta osservare che F è diagonalizzabile se e solo se

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$$

□

Corollario 5.4. *Sia*

$$p_F(t) = \pm(t - \lambda_1)^{\nu_1}(t - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (t - \lambda_s)^{\nu_s}, \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K},\ \lambda_i \neq \lambda_j,$$

il polinomio caratteristico di un endomorfismo $F\colon V \to V$. Allora F è diagonalizzabile se e solo se per ogni i vale $\nu_i = \dim \operatorname{Ker}(F - \lambda_i I)$.

Dimostrazione. Valgono sempre le diseguaglianze $\nu_i \geq \dim \operatorname{Ker}(F - \lambda_i I)$ e l'uguaglianza $\nu_1 + \cdots + \nu_s = \deg p_F = \dim V$. □

Corollario 5.5. *Sia*

$$p_F(t) = \pm(t - \lambda_1)^{\nu_1}(t - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (t - \lambda_s)^{\nu_s}, \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K},\ \lambda_i \neq \lambda_j,$$

il polinomio caratteristico di un endomorfismo $F\colon V \to V$. Se $\nu_i = 1$ per ogni i, allora F è diagonalizzabile.

Dimostrazione. Evidente. □

Corollario 5.6. *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo con polinomio minimo*

$$q_f(t) = (t - \lambda_1)^{\sigma_1}(t - \lambda_2)^{\sigma_2} \cdots (t - \lambda_s)^{\sigma_s}, \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K},\ \lambda_i \neq \lambda_j,$$

Allora f è diagonalizzabile se e solo se per ogni i vale $\sigma_i = 1$.

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato che $\sigma_i = 1$ se e solo se le molteplcità algebrica e geometrica di λ_i sono uguali. □

Esercizi.

5.1. Tra le matrici dell'Esercizio 3.1, dire quali sono diagonalizzabili.

5.2. Sia F un endomorfismo tale che $F^2 = F$. Dimostrare che F è diagonalizzabile.

5.3. Sia F un endomorfismo tale che $F^2 = I$. Dimostrare che F è diagonalizzabile.

5.4. Mostrare che due matrici diagonalizzabili sono simili (coniugate) se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

5.5. Trovare due matrici 4×4 nilpotenti dello stesso indice che non sono simili.

5.6. Sia I_n la matrice identità $n \times n$. Determinare i polinomi minimo e caratteristico della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n,2n}(\mathbb{K}).$$

5.7. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice tale che $A^2 + I = 0$. Dimostrare che la traccia di A è uguale a 0 e che n è pari. (Sugg.: considerare A come una matrice a coefficienti complessi e determinare una relazione tra la traccia di A e le molteplicità geometriche degli autovalori.)

5.8. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il polinomo minimo della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix}$$

ha grado 3?

6. Il caso delle matrici simmetriche reali

In questa sezione dimostriamo che ogni matrice simmetrica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si diagonalizza su $\mathbb{R}$. Conviene pensare A come un endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ dei vettori colonna. Osserviamo che per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ il prodotto riga per colonna $v^T v$ è uguale alla somma dei quadrati delle coordinate di v; quindi $v^T v \geq 0$ e vale $v^T v = 0$ se e solo se $v = 0$.

Lemma 6.1. *Sia $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ simmetrica, allora:*

(1) $\operatorname{Ker}(B) = \operatorname{Rad}(B)$,
(2) *per ogni numero reale $a > 0$ la matrice $B^2 + aI$ è invertibile.*

Dimostrazione. Per il primo punto, in base ai risultati sulla filtrazione dei nuclei, basta dimostrare che $\operatorname{Ker}(B^2) \subset \operatorname{Ker}(B)$. Dato $v \in \operatorname{Ker}(B^2)$ si ha

$$0 = v^T(B^2 v) = v^T B B v = (Bv)^T (Bv)$$

e quindi $Bv = 0$. Per il secondo punto, dimostriamo che $\operatorname{Ker}(B^2 + aI) = 0$ per ogni $a > 0$. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore tale che $B^2 v + av = 0$, allora

$$0 = v^T(B^2 v + av) = v^T B^2 v + av^T v = (Bv)^T(Bv) + av^T v \geq av^T v \geq 0.$$

Dunque $av^T v = 0$ e quindi $v = 0$. □

Teorema 6.2. *Ogni matrice simmetrica reale si diagonalizza su $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ simmetrica. Per il teorema fondamentale dell'algebra la matrice A possiede tutti gli autovalori su $\mathbb{C}$ ed è quindi sufficiente dimostrare che:

(1) Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di A, pensata come matrice a coefficienti complessi, allora $\lambda \in \mathbb{R}$.
(2) Per ogni autovalore λ vale $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \operatorname{Rad}(A - \lambda I)$.

Sia dunque $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ un autovalore e consideriamo la matrice simmetrica reale $B = A - aI$. Allora $\det(B - ibI) = 0$ e

$$\det(B^2 + b^2 I) = \det((B + ibI)(B - ibI)) = \det(B + ibI)\det(B - ibI) = 0.$$

Per il lemma $b = 0$, ossia $\lambda = a \in \mathbb{R}$. Il secondo punto segue dal lemma applicato alla matrice simmetrica reale $A - \lambda I$. $\square$

Osservazione 6.3. È possibile dimostrare che se A è simmetrica reale, allora esiste una base di autovettori $v_1, \ldots, v_n$ tale che $v_i^T v_j = \delta_{ij}$ (delta di Kronecker) per ogni i, j.

Esercizi.

6.1. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ simmetrica e siano $v, w \in \mathbb{R}^n$ autovettori di A relativi ad autovalori distinti. Mostrare che $v^T w = 0$.

6.2. In generale, le matrici simmetriche a coefficienti complessi non si diagonalizzano; trovare un esempio di matrice $A \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ di rango 1, simmetrica e nilpotente.