NOTE DI ALGEBRA LINEARE 2010-11

M.M. 9 NOVEMBRE 2010

1. Combinazioni lineari e generatori

Sia $\mathbb{K}$ un campo e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori in V.

Definizione 1.1. Un vettore $v \in V$ si dice **combinazione lineare** di $v_1, \dots, v_n$ se vale

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

per opportuni scalari $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

Ad esempio, il vettore $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ in quanto vale

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}.$$

Indichiamo con $L(v_1, \dots, v_1)$ l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori $v_1, \dots, v_n$, ossia

$$L(v_1, \dots, v_n) = \{v \in V \mid v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n,\ a_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \dots, n\}.$$

È facile dimostrare che $L(v_1, \dots, v_n)$ è un sosttospazio vettoriale. Infatti contiene lo 0 (basta porre $a_i = 0$ per ogni i); se

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n, \qquad w = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

sono due combinazioni lineari, allora la somma

$$v + w = (a_1 + b_1) v_1 + \cdots + (a_n + b_n) v_n$$

è ancora una combinazione lineare e per ogni scalare $t \in \mathbb{K}$ si ha

$$t(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = t a_1 v_1 + \cdots + t a_n v_n.$$

Chiameremo $L(v_1, \dots, v_n)$ **sottospazio vettoriale generato da** $v_1, \dots, v_n$ **su** $\mathbb{K}$. Quando il campo $\mathbb{K}$ è chiaro dal contesto diremo più semplicemente **sottospazio generato da** $v_1, \dots, v_n$ oppure **chiusura lineare di** $v_1, \dots, v_n$ oppure ancora **span di** $v_1, \dots, v_n$.

Osserviamo che il sottospazio $L(v_1, \dots, v_n)$ non dipende dall'ordine dei vettori v_i, ragion per cui, ad esempio vale $L(v, w) = L(w, v)$. Questo ci permette di definire, per ogni sottoinsieme finito[1] e non vuoto $A \subset V$ la sua chiusura lineare $L(A)$ come

$$L(A) = \{ \text{ combinazioni lineari di vettori in } A\},$$

e cioè

$$L(A) = L(v_1, \dots, v_n), \qquad \text{dove} \quad A = \{v_1, \dots, v_n\}.$$

Possiemo estendere tale definizione anche all'insieme vuoto ponendo $L(\emptyset) = \{0\}$.

Esempio 1.2. Sia $V = \mathbb{K}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti in $\mathbb{K}$ e sia $A = \{x, x^2\} \subset V$. Allora $L(A)$ è l'insieme dei polinomi di grado ≤ 2 senza termine noto.

---

[1] Se A è infinito si definisce $L(A)$ come l'unione dei sottospazi $L(B)$ al variare di B tra tutti i sottoinsiemi finiti di A: equivalentemente, $L(A)$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite di elementi di A.

Esempio 1.3. Consideriamo i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3,$$

e chiediamoci se la relazione $w \in L(v_1, v_2, v_3)$ è vera o falsa, e cioè se l'equazione lineare vettoriale $av_1+bv_2+cv_3 = w$ possiede una soluzione a, b, c. Per rispondere occorre studiare il sistema lineare

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 3a + 4b + c = 5 \\ 2b + c = 6 \end{cases},$$

che ammettendo soluzioni, implica che $w \in L(v_1, v_2, v_3)$, ossia che w appartiene al sottospazio vettoriale generato da v_1, v_2, v_3.

Definizione 1.4. Lo spazio vettoriale V si dice **di dimensione finita** su $\mathbb{K}$, o anche **finitamente generato**, se esistono vettori $v_1, \dots, v_n$ in V tali che $V = L(v_1, \dots, v_n)$ In questo caso diremo che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un **insieme di generatori** di V.

Uno spazio vettoriale che non è di dimensione finita si dice di **dimensione infinita**.

Esempio 1.5. Lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{K}^n$ ha dimensione finita. Definiamo infatti la **base canonica** come la successione $e_1, \dots, e_n$, dove e_i è il vettore che la i-esima coordinata uguale ad 1 e tutte le altre uguali a 0, ossia

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I vettori che formano la base canonica sono un insieme di generatori, infatti per ogni $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, vale la formula

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n.$$

Esempio 1.6. Lo spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]$ ha dimensione infinita su $\mathbb{K}$. Infatti, per ogni sottoinsieme finito $A \subset \mathbb{K}[X]$ è possibile trovare un intero d con la proprietà che ogni polinomio in A ha grado minore di d. Dunque $L(A)$ contiene solamente polinomi di grado minore di d e quindi $L(A) \neq \mathbb{K}[x]$.

La seguente proposizione riepiloga le principali proprietà della chiusura lineare.

Proposizione 1.7. *Sia A un sottoinsieme finito di uno spazio vettoriale V. Si ha:*

(1) $A \subseteq L(A)$.
(2) $L(A)$ *è un sottospazio vettoriale di* V.
(3) *Sia* $W \subset V$ *un sottospazio vettoriale, allora* $A \subset W$ *se e solo se* $L(A) \subset W$.
(4) *Dato un sottoinsieme finito* $B \subset V$, *vale* $L(A) \subset L(B)$ *se e solo se* $A \subset L(B)$.

Dimostrazione. La prima proprietà è ovvia e la seconda è già stata dimostrata. La quarta segue dalla terza e dalla seconda ponendo $W = L(B)$; rimane solo da dimostrare la (3). Sia W un sottospazio vettoriale, se $L(A) \subset W$, dato che $A \subset L(A)$ ne segue $A \subset W$. Se $A \subset W$, e siccome W è chiuso per le operazioni di somma e prodotto per scalare, ed ogni combinazione lineare può essere pensata come una composizione di somme e prodotti per scalare, ne segue che ogni combinazione lineare di elementi di A appartiene a W e quindi $L(A) \subset W$. □

Esempio 1.8. Siano $v_1, \dots, v_n$ generatori di uno spazio vettoriale V e sia W un sottospazio vettoriale proprio. Allora esiste un indice i tale che $v_i \notin W$. Infatti se $v_i \in W$ per ogni i si avrebbe $V = L(v_1, \dots, v_n) \subset W$ in contraddizione con il fatto che W è un sottospazio proprio.

Esempio 1.9. Chiediamoci se i vettori v_1, v_2 e v_3 dell'Esempio 1.3 generano $\mathbb{K}^3$. Affinché ciò sia vero è necessario che i tre vettori della base canonica appartengano a $L(v_1, v_2, v_3)$. Tale condizione è anche sufficiente perché se $\{e_1, e_2, e_3\} \subset L(v_1, v_2, v_3)$ allora vale

$$\mathbb{K}^3 = L(e_1, e_2, e_3) \subset L(v_1, v_2, v_3).$$

Il problema si riconduce quindi allo studio dei tre sistemi lineari

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 3a + 4b + c = 0 \\ 2b + c = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a + 2b = 0 \\ 3a + 4b + c = 1 \\ 2b + c = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a + 2b = 0 \\ 3a + 4b + c = 0 \\ 2b + c = 1 \end{cases}.$$

Per determinare se un determinato insieme finito genera uno spazio vettoriale V possono essere utili le seguenti osservazioni:

a) Se $A \subset B$ sono sottoinsiemi finiti di V, e se A genera V, allora anche B genera V.

b) Siano A, B due sottoinsiemi finiti di V, se A genera V ed ogni elemento di A può essere scritto come combinazione lineare di elementi di B, allora anche B genera V. Infatti se $V = L(A)$ e $A \subset L(B)$; ne segue che $L(A) \subset L(B)$ e quindi $V = L(B)$. In particolare, se A è ottenuto da B aggiungendo un numero finito di combinazioni lineari di elementi di B, e se A è un insieme di generatori, allora anche B è un insieme di generatori.

Esempio 1.10. Usiamo le precedenti osservazioni per mostrare che i vettori

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

generano $\mathbb{K}^3$. Abbiamo visto che non è restrittivo aggiungere ai tre vettori u, v, w alcune loro combinazioni lineari. Ad esempio

$$a = v - u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = w - u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(L'idea è chiara: far comparire quanti più zeri è possibile.) Ripetiamo la procedura aggiungendo conbinazioni lineari di vettori del nuovo insieme $\{u, v, w, a, b\}$:

$$c = b - 2a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad d = a + 2c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e = u - d + c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo già osservato che i vettori $e_1 = e$, $e_2 = d$ e $e_3 = -c$ generano $\mathbb{K}^3$ e quindi anche u, v, w sono generatori.

Esercizio 1.11. Sia $\mathbb{K}$ un campo di numeri e denotiamo con

$$\mathbb{K}^{\times n} = \underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ fattori}} = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$$

lo spazio vettoriale dei vettori riga ad n coordinate. Dimostrare che che i vettori $u = (1, 2, 1)$, $v = (2, 1, 3)$ e $w = (3, 3, 3)$ generano $\mathbb{K}^{\times 3}$.

2. Indipendenza lineare e teorema di scambio

Definizione 2.1. Diremo che m vettori $w_1, \ldots, w_m$ in uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, sono **linearmente dipendenti** se se esiste una loro combinazione lineare, con coefficienti non tutti nulli, che dà come risultato il vettore nullo:

$$(2.1) \qquad a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m = 0, \qquad \text{con} \quad a_i \in \mathbb{K} \quad \text{non tutti} = 0$$

I vettori $w_1, \ldots, w_m$ si dicono **lineramente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti.

Una combinazione lineare viene detta banale se tutti i coefficienti sono nulli e quindi, dei vettori risultano essere linearmente dipendenti se e solo se esiste una loro combinazione lineare nulla (ossia che ha come risultato il vettore nullo) ma non banale. Equivalentemente dei vettori sono linearmente indipendenti se e solo l'unica combinazione lineare nulla tra loro è quella banale.

In pratica per stabilire se i vettori $w_1, \ldots, w_m$ sono o meno linearmente dipendenti occorre studiare l'equazione vettoriale

$$x_1 w_1 + \cdots + x_m w_m = 0$$

e determinare se esiste o meno una soluzione $(x_1, \ldots, x_k)$, con $x_i \in \mathbb{K}$ non tutti nulli.

Esempio 2.2. I vettori v_1, v_2, v_3 dell'Esempio 1.3 sono linearmente indipendenti. Infatti l'equazione $av_1 + bv_2 + cv_3$, corrispondente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 3a + 4b + c = 0 \\ 2b + c = 0 \end{cases},$$

ammette $a = b = c = 0$ come unica soluzione.

Osserviamo che se $w_1, \ldots, w_m$ sono vettori linearmente indipendenti, allora i vettori w_i sono tutti diversi da 0 e distinti tra loro. Infatti se $w_i = 0$ si avrebbe la combinazione lineare non banale $1 \cdot w_i = 0$, mentre se $w_j = w_k$, con $i \neq k$ si avrebbe la combinazione lineare non banale $w_j - w_k = 0$. Un vettore è lnearmente indipendente se e solo se è diverso da 0.

Lemma 2.3. *Siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori di uno spazio vettoriale. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *$v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti.*
(2) *$v_1, \ldots, v_{n-1}$ sono linearmente indipendenti e $v_n \notin L(v_1, \ldots, v_{n-1})$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che (1) implica (2), ossia supponiamo per ipotesi che $v_1, \ldots, v_n$ siano linearmente indipendenti. È chiaro che $v_1, \ldots, v_{n-1}$ sono linearmente indipendenti, mentre se per assurdo $v_n \in L(v_1, \ldots, v_{n-1})$ esisterebbero $n - 1$ scalari $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tali che

$$v_n = a_1 v_1 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1}.$$

In tal caso si avrebbe

$$a_1 v_1 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1} + (-1) v_n = 0$$

in contraddizione con la lineare indipendenza di $v_1, \ldots, v_n$.
Dimostriamo adesso il viceversa, ossia che (2) implica (1): sia

$$a_1 v_1 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1} + a_n v_n = 0$$

una relazione lineare tra i vettori v_i. Se $a_n = 0$ allora l'espressione precedente si riduce ad una relazione tra i vettori indipendenti $v_1, \ldots, v_{n-1}$ e quindi anche $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$.
Se invece $a_n \neq 0$, allora si ha

$$v_n = -\frac{a_1}{a_n} v_1 - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n} v_{n-1}$$

e quindi $v_n \in L(v_1, \ldots, v_{n-1})$, contrariamente a quanto ipotizzato. □

Teorema 2.4 (di scambio)**.** *Sia A un sottoinsieme finito di uno spazio vettoriale. Se $L(A)$ contiene m vettori linearmente indipendenti, allora anche A contiene m vettori linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Sia $B \subset L(A)$ un insieme di m vettori linearmente indipendenti e indichiamo con $\mathcal{F}$ la famiglia (finita) di tutti i sottoinsiemi di $A \cup B$ formati da m vettori linearmente indipendenti. La famiglia $\mathcal{F}$ non è vuota perché contiene B. Tra tutti i sottoinsiemi appartenenti alla famiglia $\mathcal{F}$ scegliamone uno, che chiameremo C, che ha il maggior numero di elementi in comune con A. Per dimostrare il teorema è sufficiente provare che $C \subset A$.

Supponiamo per assurdo che C non sia contenuto in A, possiamo allora scrivere

$$C = \{w_1, \ldots, w_m\}, \qquad \text{con } w_m \notin A.$$

Siccome i w_i sono indipendenti, ne segue che $w_m \notin L(w_1, \dots, w_{m-1})$, quindi $L(w_1, \dots, w_{m-1}) \neq L(A)$ e di conseguenza esiste $v \in A$ tale che $v \notin L(w_1, \dots, w_{m-1})$. L'insieme $D = \{w_1, \dots, w_{m-1}, v\}$ è ancora formato da m vettori indipendenti, ma ha in comune con A un vettore in più rispetto a C, in contraddizione con la scelta di C. □

Corollario 2.5. *In uno spazio vettoriale generato da n vettori esistono al più n vettori linearmente indipendenti.*

Corollario 2.6. *Uno spazio vettoriale V è di dimensione infinita se e solo se per ogni intero $m > 0$ esistono m vettori linearmente indipendenti in V.*

Dimostrazione. Se V è di dimensione infinita, allora per ogni successione finita $v_1, \dots, v_n$ di vettori in V si ha $L(v_1, \dots, v_n) \neq V$. Possiamo quindi costruire per ricorrenza una successione infinita $\{v_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, con le proprietà

$$v_1 \neq 0, \quad v_2 \notin L(v_1), \quad \dots, \quad v_{i+1} \notin L(v_1, \dots, v_i), \quad \dots$$

Qualunque sia $m > 0$ i primi m termini della successione sono linearmente indipendenti.

Viceversa, se V ha dimensione finita è possibile trovare un intero $n \geq 0$ ed n vettori che generano V. Per il teorema di scambio non esistono m vettori linearmente indipendenti per ogni $m > n$. □

Esempio 2.7. Sia α un numero reale, allora gli $n+1$ numeri $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ sono linearmente dipendenti su $\mathbb{Q}$ se e solo se α è la radice di un polinomio non nullo di grado $\leq n$. È ben noto, anche se molto difficile da dimostrare, che il numero $\pi \in \mathbb{R}$ è trascendente, ossia non è radice di alcun polinomio a coefficienti razionali. Ne segue che per ogni $n > 0$ i numeri $1, \pi, \pi^2, \dots, \pi^n$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$ e quindi che $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita su $\mathbb{Q}$.

Corollario 2.8. *Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio di dimensione finita ha ancora dimensione finita.*

Dimostrazione. Osserviamo che se W è un sottospazio di V e se $w_1, \dots, w_m \in W$ sono vettori linearmente indipendenti in W, allora sono linearmente indipendenti anche in V. Basta adesso applicare il corollario precedente. □

3. Basi e dimensione

Un insieme finito di generatori A di uno spazio vettoriale V si dice **minimale** se comunque si toglie un vettore da A, i rimanenti non generano V. Ogni spazio vettoriale di dimensione finita ammette un insieme minimale di generatori: è sufficiente partire da un insieme finito di generatori e poi togliere uno alla volta i vettori superflui fino ad arrivare ad un insieme minimale.

Lemma 3.1. *Sia $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme finito di generatori di uno spazio vettoriale V. Allora i vettori di $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se A è un insieme minimale di generatori.*

Dimostrazione. Supponiamo A minimale e consideriamo una combinazione lineare nulla

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

e dimostriamo che $a_i = 0$ per ogni i. Per semplicità espositiva proviamo che $a_n = 0$; le argomentazioni esposte si applicano in egual misura anche agli altri coefficienti. Se per assurdo $a_n \neq 0$ si avrebbe

$$v_n = -\frac{a_1}{a_n} v_1 - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n} v_{n-1} \in L(v_1, \dots, v_{n-1}),$$

quindi

$$\{v_1, \dots, v_n\} \subset L(v_1, \dots, v_{n-1})$$

e di conseguenza

$$V = L(v_1, \dots, v_n) \subset L(v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Abbiamo quindi provato che l'insieme $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è ancora un insieme di generatori, in contraddizione con l'ipotesi di minimalità. Viceversa se A non è minimale esiste un sottoinsieme proprio $B \subset A$ tale che $L(B) = V$; a meno di rinominare gli indici possiamo supporre $v_n \notin B$. Quindi $v_n \in L(B) \subset L(v_1, \dots, v_{n-1})$ e questo implica che $v_1, \dots, v_n$ non sono linearmente indipendenti. □

Definizione 3.2. Diremo che n vettori $v_1, \dots, v_n$ **formano una base** di uno spazio vettoriale V se sono contemporaneamente generatori e linearmente indipendenti. Una **base** è una successione di generatori linearmente indipendenti.

Osservazione 3.3. Per un insieme finito di vettori, la proprietà di formare una base è indipendente dall'ordine in cui questi vettori sono considerati. Viceversa una base dipende dall'ordine in cui i vettori sono considerati. Dunque n generatori indipendenti formano esattamente $n!$ basi distinte.

Proposizione 3.4. *Una successione finita di vettori $v_1, \dots, v_n$ è una base di uno spazio vettoriale V se e solo se per ogni vettore $v \in V$ esistono, e sono unici, dei coefficienti $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che*

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n.$$

Dimostrazione. L'esistenza dei coefficicnti a_i è del tutto equivalente al fatto che i vettori v_i generano V. Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti e se

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n, \qquad v = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n,$$

allora

$$0 = v - v = (a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n$$

da cui segue $a_i = b_i$ per ogni i, ossia l'unicità dei coefficienti. Viceversa se i coeficienti a_i sono unici, l'unico caso in cui si ha $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ deve necessariamente essere $a_1 = \cdots = a_n = 0$ e quindi i vettori v_i sono linearmente indipendenti. □

Osservazione 3.5. Ogni successione finita $v_1, \dots, v_n$ di vettori in uno spazio vettoriale V definisce un *polivettore riga*

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ volte}}$$

ed una applicazione (che indicheremo con lo stesso simbolo) $\mathbf{v} \colon \mathbb{K}^n \to V$ definita secondo la regola del *prodotto riga per colonna*:

$$\mathbf{v}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (v_1, \dots, v_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n.$$

La Proposizione 3.4 dice che una successione di vettori $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ è una base se e solo se l'applicazione $\mathbf{v} \colon \mathbb{K}^n \to V$ è bigettiva.

Esempio 3.6. Se $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$, allora l'applicazione $\mathbf{e} \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è l'identità; dunque *la base canonica è una base!*

Abbiamo visto che ogni insieme minimale di generatori forma una base, e quindi abbiamo dimostrato che:

(1) **da ogni insieme finito di generatori si può estrarre una base**,
(2) **ogni spazio vettoriale di dimensione finita possiede una base**.

Teorema 3.7. *Due basi di uno spazio vettoriale di dimensione finita contengono lo stesso numero di vettori.*

Dimostrazione. Siano $v_1, \dots, v_n$ e $w_1, \dots, w_m$ due basi. Siccome i v_i generano ed i w_j sono linearmente indipendenti, segue dal teorema di scambio che $n \geq m$. Per evidenti ragioni di simmetria si ha anche $m \geq n$ e quindi $n = m$. □

Definizione 3.8. Una successione $w_1, \dots, w_m$ di vettori linearmente indipendenti si dice **massimale** se comunque si aggiunge un vettore w_{m+1} otteniamo una successione $w_1, \dots, w_m, w_{m+1}$ di vettori linearmente dipendenti.

Nelle notazioni della definizione precedente, abbiamo visto che se $w_1, \dots, w_m$ sono linearmente indipendenti, allora $w_1, \dots, w_m, w_{m+1}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $w_{m+1} \in L(w_1, \dots, w_m)$. Ne consegue che una successione di vettori linearmente indipendenti è una base se e solo se è massimale.

Possiamo inoltre affermare che **in uno spazio vettoriale di dimensione finita ogni successioone di vettori linearmente indipendenti si completa ad una base.** Infatti, siano $v_1, \dots, v_k$ linearmente indipendenti, se sono anche generatori abbiamo finito, altrimenti scegliamo un vettore $v_{k+1} \notin L(v_1, \dots, v_k)$. Adesso ripetiamo la procedura per la successione $v_1, \dots, v_{k+1}$; siccome il numero di vettori linearmente indipendenti è limitato dopo un numero finito di passaggi la procedura si interrompe.

Definizione 3.9. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. La **dimensione** $\dim_{\mathbb{K}} V$ di V su $\mathbb{K}$ è il numero di elementi di una (qualunque) base di V. Scriveremo semplicemente $\dim V$ al posto di $\dim_{\mathbb{K}} V$ quando il campo $\mathbb{K}$ è chiaro dal contesto.

Esempio 3.10. Lo spazio vettoriale nullo (formato dal solo vettore nullo) è l'unico spazio vettoriale di dimensione 0.

Esempio 3.11. Si ha $\dim \mathbb{K}^n = n$, infatti la base canonica è formata da n vettori.

Esempio 3.12. Sia $V \subset \mathbb{K}[x]$ il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado minore di n. Allora V ha dimensione n in quanto una base è data dai polinomi $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$.

Esempio 3.13. Si ha $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ in quanto $1, i \in \mathbb{C}$ sono una base di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Per il teorema di scambio, se V è uno spazio vettoriale di dimensione n, allora ogni insieme di generatori deve contenere almeno n vettori ed ogni insieme di vettori linearmente indipendenti contieme al più n elementi. Viceversa vale il seguente risultato.

Lemma 3.14. *Per una successione $v_1, \dots, v_n$ di vettori in uno spazio vettoriale di dimensione n le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. $v_1, \dots, v_n$ *è una base,*
2. $v_1, \dots, v_n$ *sono linearmente indipendenti,*
3. $v_1, \dots, v_n$ *sono generatori.*

Dimostrazione. In uno spazio di dimensione n ogni insieme di n vettori indipendenti è necessariamente massimale ed ogni insieme di n generatori è necessariamente minimale. □

Esempio 3.15. Ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{K}^n$ è una base.

Lemma 3.16. *Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Allora* $\dim W \leq \dim V$ *e vale* $\dim W = \dim V$ *se e solo se* $W = V$.

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che W ha dimensione finita ed ogni base di W è un sistema linearmente indipendente in V. Se $\dim W = \dim V$, per il lemma precedente, ogni base di W è anche base di V. □

Definizione 3.17. Si chiamano **coordinate** di un vettore v rispetto ad una base $v_1, \dots, v_n$ i coefficienti $a_1, \dots, a_n$ tali che

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$