Esonero di Algebra lineare del 26 gennaio 2011: Università di Roma "La Sapienza", corso di laurea in Matematica

Esercizio 1. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e dire, motivando la risposta, se è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$, su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.

Esercizio 4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcolare:

(1) Il polinomio caratteristico e gli autovalori.
(2) Per ogni autovalore la molteplicità geometrica ed il rispettivo autospazio.
(3) Il polinomio minimo.

Esercizio 5. Di una matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ sappiamo che:

(1) La prima riga è $(1, -1, 1)$.
(2) A è diagonalizzabile.
(3) La traccia di A è uguale a 2.
(4) I due vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono autovettori di A.

Determinare tutti i coefficienti di A.

Esercizio 6. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $W = \mathcal{L}(V, V) = End(V)$ lo spazio vettoriale degli endomorfismi di V. Dato un elemento $A \in W$ denotiamo

$$R_A \colon W \to W, \qquad R_A(B) = AB + BA.$$

Il candidato risponda alle seguenti domande (tra loro indipendenti):

(1) Se il polinomio caratteristico di A è $t(t-1)(t-2)$ provare che A e R_A sono diagonalizzabili e si calcoli il polinomio caratteristico di R_A.
(2) Provare che se A è diagonalizzabile allora R_A è diagonalizzabile e che se A è nilpotente allora R_A è nilpotente.
(3) Se il polinomio minimo di A è $t(t-1)(t-2)$ si calcolino gli autovalori di R_A.
(4) Se A è diagonalizzabile e $\dim V = n$, provare che il polinomio minimo di R_A ha grado minore od uguale a $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Trovare un esempio in cui $n = 3$ ed il polinomio minimo di R_A ha grado 6.