Prova scritta di Algebra lineare del 3 febbraio 2011

Esercizio 1. In $V = \mathbb{R}^3$ si considerino il sottospazio U generato dai vettori

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

e il sottospazio W di equazione $k\,x + y + (k-2)z = 0$. Determinare, al variare di k in $\mathbb{R}$, la dimensione ed una base del sottospazio $U \cap W$ di V.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a n.

(1) Mostrare che i tre vettori $e_1 = x+1$, $e_2 = x+2$, $e_3 = x^2+x+1$ formano una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$;
(2) Mostrare che i due vettori $f_1 = x+3$, $f_2 = x+4$ formano una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$;
(3) Scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione lineare
$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} &\to \mathbb{R}[x]_{\leq 1}\\ p(x) &\mapsto p(x+1) - p(x-1)\end{aligned}$$
rispetto alle basi $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{f_1, f_2\}$.
(4) determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di φ.

Esercizio 3. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\ -1 & 1 & -3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

(1) determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A;
(2) per ogni autovalore, determinare la dimensione ed una base del rispettivo autospazio.
(3) dire se A è diagonalizzabile
(4) determinare il polinomio minimo di A.

Esercizio 4. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo dei numeri complessi e $f\colon V \to V$ un endomorfismo lineare. Si assuma che $U \subset V$ sia un sottospazio vettoriale proprio f-invariante, ossia tale che $f(U) \subseteq U$. Dimostrare che esiste un iperpiano $H \subset V$ tale che $U \subseteq H$ e $f(H) \subseteq H$. (Ricordiamo che un sottospazio H si dice un iperpiano se $\dim H = \dim V - 1$.)

Esercizio 5. Sia $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ una matrice fissata e sia
$$\Phi\colon M_{n,n}(\mathbb{K}) \to M_{n,n}(\mathbb{K}), \qquad \Phi(A) = AB + B^2A.$$

(1) Mostrare che Φ è lineare e calcolare $\Phi^2(A)$.
(2) Se B è nilpotente, provare che $\Phi^m = 0$ per ogni intero $m \geq \frac{3n}{2}$.
(3) Se $q_B(t) = t^k$ è il polinomio minimo di B, provare che, dato un polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$, vale $p(B) \in \operatorname{Ker}(\Phi)$ se e solo se $p(t)$ è divisibile per t^{k-1}.